UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ELOAR BARRETO FEITOZA SÁ

DOS NÚMEROS NATURAIS AOS NÚMEROS RACIONAIS:

Como ocorre essa passagem em livros didáticos

São Cristóvão - SE
Outubro de 2017

ELOAR BARRETO FEITOZA SÁ

DOS NÚMEROS NATURAIS AOS NÚMEROS RACIONAIS:
Como ocorre essa passagem em livros didáticos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como requisito parcial para a obtenção do grau de licenciada em Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. João Paulo Attie.

São Cristóvão – SE
Outubro de 2017

FOLHA DE AVALIAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

ELOAR BARRETO FEITOZA SÁ

TÍTULO DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO: **DOS NÚMEROS NATURAIS AOS NÚMEROS RACIONAIS: Como ocorre essa passagem em livros didáticos**

DATA: 05 de outubro de 2017

AVALIADO POR:

Prof. Dr. João Paulo Attie (Orientador)

Prof. Dr. Rafael Neves Almeida (Examinador Convidado)

Profa. Msc. Patrícia Pugliesi Carneiro (Examinadora Convidada)

RESUMO

Nesta pesquisa, são apresentados os resultados de análises feitas em alguns livros didáticos recomendados pelo PNLD (Plano Nacional do Livro Didático), com o objetivo de investigar como ocorre a apresentação do conjunto dos números racionais e se, em tais livros, constam formas de superação daquilo que consideramos ser um dos obstáculos para a compreensão do tema: a transição entre um ambiente de conjuntos discretos para um conjunto denso. Procurando articular aspectos envolvidos com o ensino-aprendizagem dos números racionais, averiguamos, além de documentos do Ministério da Educação, textos relacionados à essa transição. Dentre estes, nos fundamentamos em três categorias principais: a dualidade discreto/contínuo, como fundamental à compreensão da noção de números em seu sentido completo, em Brolezzi (1996), os aspectos históricos presentes na origem dos números, em Caraça (1951) e trabalhos relacionadas às dificuldades de estudantes com os números racionais, como em Gonçalves (2014), Oliveira (2016) e Pereira e Zúñiga (2015). Nossa conclusão, depois das análises, é a de que os livros didáticos apresentam equívocos, não apenas quanto à falta da noção de densidade na caracterização desse conjunto numérico, mas também na própria representação dos elementos do conjunto.

Palavras-Chave: Ensino de Matemática, Livro Didático, Números Racionais.

ABSTRACT

In this research, the results of analyzes made in some textbooks recommended by National Textbook Plan (Plano Nacional do Livro Didático-PNLD) are presented, with the purpose of investigating how the presentation of the set presents rational numbers and if, in such books, there are ways of overcoming what we consider be one of the obstacles to understanding the theme, the transition from an environment of discrete sets to a dense set. In order to articulate aspects involved with the teaching-learning of rational numbers, we have ascertained, besides documents of the Ministry of Education, texts related to this transition. In this context, we based in three principal categories, the duality discreet/continuous, as fundamental to the comprehension of the notion of numbers in their complete sense, in Brolezzi (1996), the historical aspects present in the origin of numbers, in Caraça (1951) and works related to the difficulties of students with rational numbers, as in Gonçalves 2014), Oliveira (2016) and Pereira and Zúñiga (2015). Our conclusion, after the analysis, is that textbooks present misunderstandings, not only regarding the lack of the notion of density in the characterization of this numerical set, but also in the representation of the elements of the set.

Keywords: Teaching of Mathematics, Didactic Book, Rational Numbers.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SIGLAS

ANA	Avaliação Nacional da Alfabetização
ANEB	Avaliação Nacional da Educação Básica
ANRESC	Avaliação Nacional do Rendimento Escolar
EJA	Educação de Jovens e Adultos
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
FAE	Fundação de Assistência ao Estudante
FNDE	Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE)
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
IDEB	Índice de desenvolvimento da Educação Básica
INEP	Instituto de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
INL	Instituto Nacional do Livro
OCDE	Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PISA	*Programme for International Studente Assessment*
PLiDEF	Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A utilização dos números naturais começa na vida em sociedade, quando ainda somos bem pequenos e, é quando iniciamos nossos estudos formais que começamos a sistematizar e ampliar o conhecimento sobre esse conjunto. Nesse processo de ampliação, conhecemos outros conjuntos numéricos, mas estamos tão concretamente ambientados ao conjunto dos números naturais, que dificuldades com os números inteiros e racionais, por exemplo, estão fortemente presentes tanto no ensino fundamental quanto no ensino médio. Pesquisas como as de Gonçalves (2014) e Pereira e Zúñiga (2015), por exemplo, mostram que as dificuldades com os números racionais permanecem ao longo dos anos escolares alcançando o final da educação básica e interferindo na aprendizagem de outros conteúdos.

Embora tenhamos documentos como os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) apontando para tais dificuldades e uma possível relação com a passagem dos números naturais para os números racionais, consideramos a necessidade de verificar como se processa essa transição. Acreditamos que, tendo em vista as características peculiares dos números racionais em relação aos números naturais e inteiros, a apresentação dos conjuntos numéricos sofre uma mudança brusca, pelo fato de que tanto os números naturais quanto os inteiros podem ser escritos explicitando-se seus elementos (os sucessores são conhecidos), o que não ocorre no caso dos racionais (um conjunto denso). Essa mudança pode ser, ao nosso ver, uma importante causa para dificuldades cognitivas no processo de compreensão desse conteúdo.

Dessa forma, a hipótese que fundamenta a presente pesquisa é a de que, no assunto conjunto dos racionais, um obstáculo para a efetiva aprendizagem pode ser a passagem inadequada de conjuntos da categoria naturais/inteiros (discretos) para um conjunto denso, como o dos racionais.

Nesse contexto, tivemos como objetivo investigar e analisar como livros didáticos, do PNLD[1]: a) apresentam o conjunto dos racionais e b) se neles constam formas de superação desse possível obstáculo.

Para tanto, no primeiro capítulo deste trabalho, apresentamos as principais avaliações de desempenho de estudantes da educação básica, apontando os resultados obtidos por cada uma delas no âmbito da matemática e procurando aspectos relacionados ao tema Números.

[1] Programa Nacional do Livro Didático. Mais informações sobre este programa encontram-se no capítulo 3 deste texto.

No segundo capítulo, buscamos na história dos conjuntos numéricos um pouco do desenvolvimento dos números naturais e dos números racionais e também apresentamos algumas das dificuldades de aprendizagem encontradas por pesquisadores quando o assunto é especificamente o conjunto dos números racionais.

No terceiro capítulo, transcorremos sobre os passos dados para a construção desta pesquisa, levando-se em consideração o foco dado à nossa principal fonte de análise de dados: os livros didáticos, embora estejamos cientes de que as dificuldades no processo de ensino-aprendizagem vão além de uma das ferramentas usadas pelo professor.

Por conseguinte, os dados obtidos em cada um dos livros analisados estão apresentados no quarto capítulo.

No último capítulo, apresentamos nossas considerações finais a respeito do que fora explorado ao longo de toda a pesquisa, voltando-nos aos objetivos que conduziram sua construção.

CAPÍTULO I: DESEMPENHO EM MATEMÁTICA

Não é difícil encontrarmos alunos que afirmam odiar a Matemática ou mesmo que a consideram muito complicada. A presença de dificuldades na aprendizagem de matemática é recorrente tanto em situações cotidianas como na literatura. Em conformidade com esta realidade, o baixo rendimento de estudantes da educação básica em Matemática transparece não apenas nas próprias avaliações escolares, mas também em avaliações de âmbito nacional e internacional, tais como a denominada Prova Brasil e as avaliações do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes.

O *Programme for International Studente Assessment* (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes), comumente conhecido por sua sigla PISA, é uma pesquisa avaliativa que ocorre a cada três anos desde 1997 e é aplicada a estudantes com 15 anos de idade, quando na maioria dos países, os jovens estão próximos ao término da educação obrigatória. É a idade em que supostamente os jovens já tenham adquirido conhecimentos e habilidades essenciais à sociedade.

Essa pesquisa do PISA é coordenada pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), da qual fazem parte 35 países/economias parceiras. Mas além deles, países convidados também participam tendo seus resultados apresentados pelo PISA em relatório geral bem como individual.

Através dessa pesquisa são monitoradas tendências quanto à aquisição de conhecimento em Ciências, em Leitura e em Matemática e, a cada ciclo, uma dessas áreas é mais focada apresentando um maior número de itens. Em 2000, Leitura foi a área em foco; em 2003, foi Matemática e em 2006, Ciências. Seguindo esta ordem de foco, na última edição ocorrida em 2015, prevaleceu a área de Ciências. Nesse ano de 2015, foram coletados dados também com professores, pela primeira vez e, como o foco do ano foi Ciências, o maior número de professores foi desta área.

As tendências levantadas são analisadas não apenas relacionando os desempenhos dos países, mas também por grupos avaliados dentro do mesmo país, pois a aplicação inclui questionários para levantamento de dados demográficos, socioeconômicos e educacionais. Assim, o PISA serve de ferramenta a políticas educacionais e estabelecimento de metas para melhoria da educação. Seu objetivo é justamente contribuir para discussões que conduzam à qualidade da educação em cada um dos países participantes, levantando dados e indicando o nível de preparação de jovens para a cidadania que esses países estão alcançando.

Em relação à área de Matemática, o PISA procura verificar o quanto o jovem, alvo da pesquisa, é capaz de lidar com a Matemática de maneira adequada frente a problemas e situações da realidade. Os conteúdos matemáticos usados no PISA envolvem mudanças e relações; espaço e forma; quantidade; incerteza e dados. Segundo consta no relatório Brasil no PISA 2015:

> A noção de quantidade talvez seja o aspecto matemático mais abrangente e essencial com o qual nos envolvemos e trabalhamos. Ela está presente na quantificação de características de objetos, relações, situações e entidades no mundo, na compreensão de várias representações de quantificações e no julgamento de interpretações e argumentos baseados em quantidades. Para se envolver com a quantificação do mundo, é necessário compreender medidas, contas, grandezas, unidades, indicadores, tamanhos relativos e tendências e padrões numéricos. Aspectos do raciocínio quantitativo, como a percepção dos números, a compreensão da múltipla representação de números, o requinte no cálculo mental e computacional, a estimativa e a avaliação da aceitabilidade de resultados, são a base do letramento matemático no que se refere a quantidade. A quantificação é um método primário de descrição e medição de um amplo conjunto de características do mundo. Ela permite a modelação de situações para a verificação de mudanças e relações, para a descrição e manipulação do espaço e das formas, para a organização e interpretação de dados e para a medição e avaliação de incertezas. Assim, o letramento matemático na área da quantidade aplica conhecimentos de números e operações numéricas a vários tipos de ambientes e situações. (BRASIL, 2016, p 146-147).

O conhecimento de números é fundamental para facilitar também a resolução de problemas na categoria de incertezas e dados, próprias da unidade temática probabilidade e estatística. Por conseguinte, Números (com seus conceitos e representações e sistemas numéricos, propriedades de inteiros e racionais) é um dos tópicos de conteúdos indispensavelmente presentes no PISA.

O Brasil participa dessa pesquisa desde o ano 2000 sob coordenação do Instituto de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). Nas três áreas (Leitura, Matemática e Ciências), o Brasil apresenta desempenho abaixo da média dos países avaliados, sendo que o resultado em Matemática teve o maior desvio das três áreas em relação às respectivas médias. Foram 113 pontos de diferença (a média dos países da OCDE foi de 490 e o resultado do Brasil foi de 377 pontos). Em todas as edições, o desempenho brasileiro esteve abaixo do nível recomendado.

Em relação à Matemática, o Brasil vinha apresentando um crescimento a cada triênio, ainda que muito baixo, de 0,7%, em média. Contudo, houve declínio no resultado obtido em 2015 e 70% dos alunos brasileiros avaliados não alcançaram o nível mais básico de proficiência em matemática, nível que requer interpretação e reconhecimento de situações que necessitam apenas de inferência direta e interpretação de resultados e uso de conhecimento básico em matemática para resolver problemas simples.

Tabela 1: Resultado do Brasil no PISA desde 2000

Dados	2000	2003	2006	2009	2012	2015
Alunos participantes	4.893	4.452	9.295	20.127	19.204	23.141
Leitura	396	403	393	412	407	407
Matemática		356	370	386	389	377
Ciências			390	405	402	401

Fonte: INEP, 2015, extraído de <http://portal.inep.gov.br/pisa-no-brasil>

Para os resultados, há seis níveis de proficiência no PISA 2015, sendo cada nível associado a um escore mínimo. Assim quanto maior o escore, maior o nível desde que atingido o mínimo exigido para cada nível. Em Matemática, dentre os membros da OCDE o maior percentual (24,81%) ficou no nível 3 e abaixo desse nível ficaram 45,91%. No caso Brasil em relação à Matemática, 43,74% dos estudantes avaliados ficaram abaixo do menor nível, não havendo, por parte da OCDE, indicação de habilidades desenvolvidas.

Cerca 26,51% estudantes brasileiros atingiram o nível 1, relacionado à capacidade de executar ações óbvias, procedimentos rotineiros; e 17,18%, o nível 2, relacionados ao emprego de algoritmos, fórmulas, procedimentos para a resolução de problemas com números inteiros. O nível 2 é "patamar que a OCDE estabelece como necessário para que os jovens possam exercer plenamente sua cidadania." (BRASIL, 2016, p.171). Portanto, no Brasil, 70,3% dos estudantes avaliados ficaram abaixo deste nível em Matemática.

No nível 3 está a capacidade de trabalhar com frações e números decimais, além de outros conteúdos como porcentagens, relações de proporção, etc, além de abordar problemas cujas soluções requerem interpretações e raciocínios básicos. No Brasil, apenas 8,58%

atingiram esse nível e 3,99% ultrapassaram-no na avaliação de matemática do PISA 2015. Em Sergipe, o desempenho foi menor que o do Brasil no PISA 2015 (357 x 377) e esses percentuais assustam ainda mais: abaixo do nível 1 ficaram cerca de 58% dos estudantes, 24% atingiram o nível 1 e 11%, o nível 2.

Em relação ao desempenho de estudantes brasileiros, um outro exemplo de levantamento que se realiza, específico do Brasil, corresponde às avaliações abrangidas pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica, o SAEB, das quais o desempenho resultante compõe o Índice de desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) do país. Foi considerando os resultados obtidos pelos países/economias da OCDE, que o INEP estabeleceu como meta nacional para o IDEB a média seis a ser alcançada até 2022. O IDEB foi criado em 2007 para monitorar as condições de ensino/aprendizagem no Brasil e estabelecer metas para a melhoria da qualidade aferida. Ele é calculado a partir do rendimento escolar (índice de aprovação) e, como dito, do desempenho em avaliações nacionais abrangidas pelo SAEB, por sua vez, instituído em 1990.

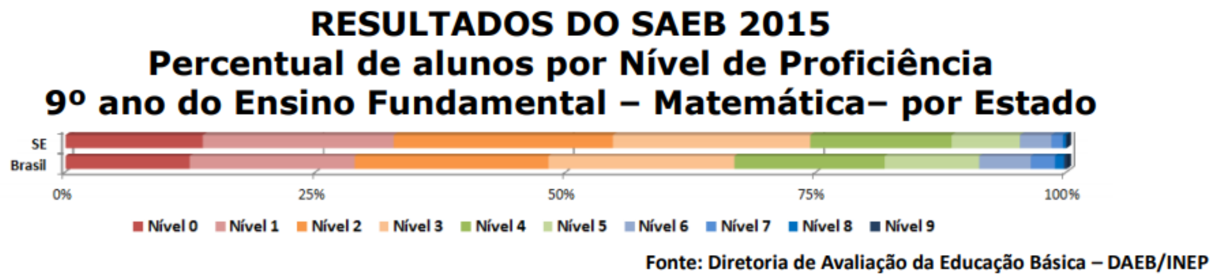
O SAEB, em sintonia com os objetivos do IDEB, levanta dados que subsidiam não apenas o monitoramento como também o desenvolvimento de políticas públicas mais efetivas em relação à educação básica mediante compreensão de fatores relacionados ao desempenho dos alunos. Isto porque além das avaliações de desempenho, são aplicados também questionários sobre fatores socioeconômicos e de contexto. As três avaliações que o compõem, atualmente, ocorrem a cada dois anos. São elas: a Avaliação Nacional da Educação Básica (ANEB), a Avaliação Nacional do Rendimento Escolar (ANRESC ou Prova Brasil) e a Avaliação Nacional da Alfabetização (ANA). As três levantam dados quanto às áreas de Português e Matemática. A ANEB é realizada por amostragem, em escolas da rede pública e privada. Essa amostragem abrange alunos do 5º ano, 9º ano do ensino fundamental e último ano do ensino médio. Já as outras duas avaliações são censitárias, sendo que a ANRESC/Prova Brasil é voltada ao mesmo público alvo da ANEB, porém apenas os de escolas públicas, e a ANA é destinada a alunos do 3º ano do ensino fundamental, uma vez que procura avaliar níveis de alfabetização, também das redes públicas.

Em 1995, o SAEB passou a utilizar uma metodologia para a elaboração das avaliações que possibilita a comparação de resultados em suas diversas edições. Foi então que se registrou comparativamente uma contínua queda no desempenho de 1995 a 2001. Neste ano de 2001, o SAEB começou a focar no desempenho de alunos apenas em Língua Portuguesa e

Matemática. Foi o ano com piores resultados até então. Após 2001, o desempenho em matemática nas séries iniciais do ensino fundamental começou a apresentar crescimento, ao passo que os anos finais tiveram queda até 2005 a partir de quando começou a apresentar leve, porém não muito significativa, recuperação. E, em contrapartida, no ensino médio os resultados oscilam em torno de uma linha de tendência de leve queda a cada ano de avaliação. Em suma, os resultados desde 1995 revelam que ainda não se alcançou o nível considerado adequado em nenhuma das três etapas do ensino.

No Brasil, os resultados de 2015 para o quinto ano, o oitavo ano e a terceira série foram 219, 255,8 e 267, respectivamente. Levando-se em consideração esses dados, Sergipe esteve abaixo da média nacional para os três anos de ensino avaliados com as seguintes pontuações: 201; 247,5 e 258,2. Verificando mais detalhadamente os desempenhos, foram mais de 70% dos estudantes brasileiros do 9º ano que não ultrapassaram o nível 4 (275-300[2]). Mais de 60% sequer atingiram esse nível, conforme pode ser visto no gráfico a seguir. No ensino médio, foram mais de 75% dos estudantes avaliados que não atingiram o nível 4 (300-325[3]). Segundo o Movimento Todos Pela Educação, as pontuações mínimas para se considerar que o aluno apresenta nível adequado de aprendizado em Matemática são 225, 300 e 350 para o fundamental menor, fundamental maior e ensino médio, respectivamente. Portanto, os resultados mostram desempenhos aquém do adequado.

Figura 1: Percentual de estudantes do 9º ano do ensino fundamental em Sergipe e no Brasil por nível de proficiência no SAEB 2015

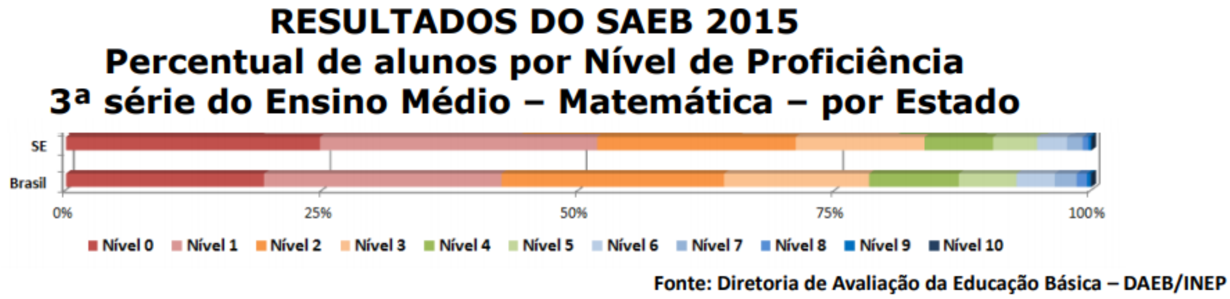


Fonte: INEP, 2016, extraído de <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/aneb_anresc/resultados/resumo_dos_resultados_saeb_2015.pdf>

2 Conforme escalas disponíveis em: http://portal.inep.gov.br/web/guest/educacao-basica/saeb/matrizes-e-escalas <acesso em 12/08/2017>

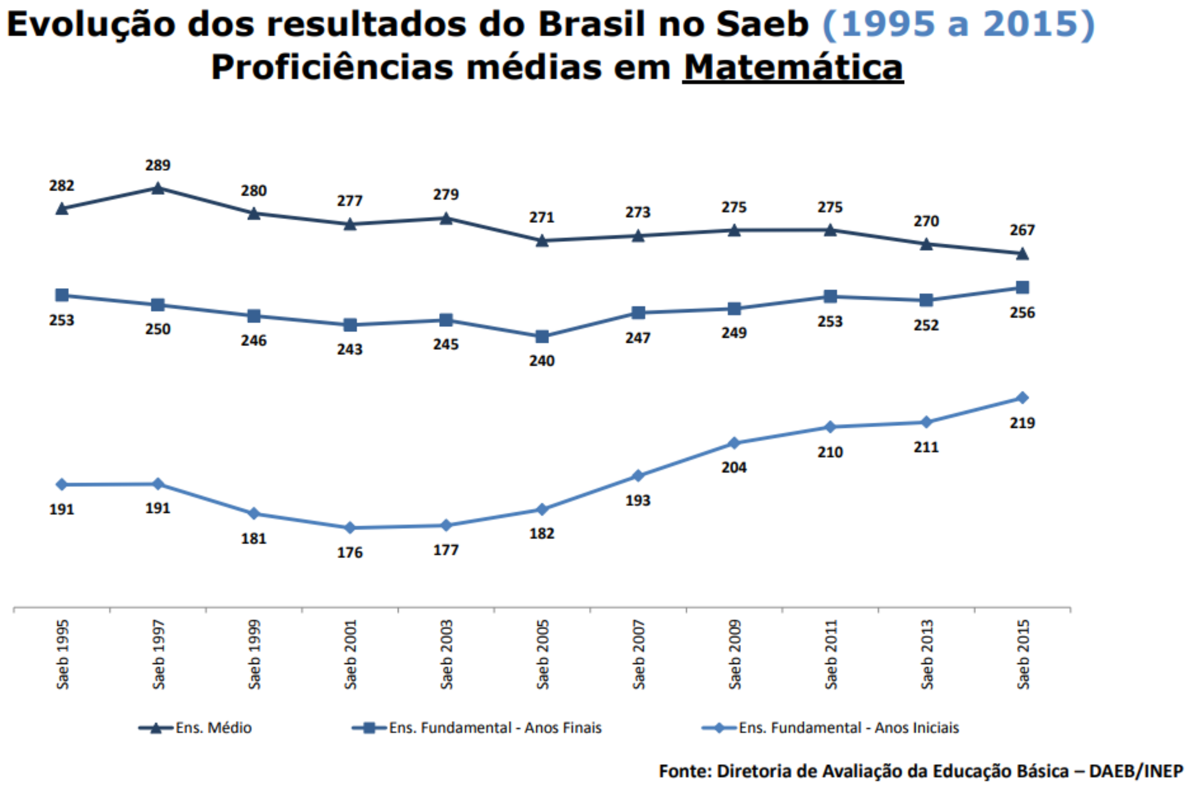
3 Idem nota 2

Figura 2:Percentual de estudantes da 3a série do ensino médio em Sergipe e no Brasil por nível de proficiência no SAEB 2015



Fonte: INEP, 2016, extraído de:
<http://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/aneb_anresc/resultados/resumo_dos_resultados_saeb_2015.pdf >

Figura 3: Proficiência média em matemática, no Brasil, entre os anos 1995 e 2015 na avaliação do SAEB



Fonte: INEP, 2016, extraído de:
<http://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/aneb_anresc/resultados/resumo_dos_resultados_saeb_2015.pdf>

Segundo a Fundação Lemann (2016, p.18), “A dificuldade com frações é tão grave que a resposta mais frequente para a questão ao lado [observar na nota de rodapé[4]] é 34%, uma simples junção dos números 3 e 4 que aparecem no enunciado.”

“O Ensino Médio apresenta índices preocupantes, não tendo evoluído nos últimos anos. As taxas de aprovação evoluem muito lentamente e os índices de proficiência são muito baixos. O Ideb[5] da rede pública em 2015 foi de 3,5 e o Ideb geral do país foi de 3,7.” (FUNDAÇÃO LEMANN, 2016, p. 26). Além disso, não houve destaque, ou seja, não houve Estado ou mesmo rede que se sobressaiu no indicador do IDEB.

O desempenho de estudantes do ensino médio brasileiro pode ser obtido também via Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Este exame é, como o próprio nome indica, uma avaliação de nível nacional. Ele foi criado em 1998 tendo como finalidade avaliar o desempenho escolar daqueles que estivessem no final do ensino médio, ou seja, da educação básica. Atualmente, é mantida essa finalidade e o exame é a via de acesso ao ensino superior das mais diversas universidades públicas do país, sendo, portanto, um exame de seleção unificada. Desde 2009, as provas são organizadas em quatro áreas de conhecimento: linguagens, códigos e suas tecnologias; matemática e suas tecnologias; ciências da natureza e suas tecnologias e ciências humanas e suas tecnologias. Para todas essas áreas estão definidos eixos cognitivos que abrangem domínio de linguagens, compreensão de fenômenos, análise de situações-problema, construção de argumentação e elaboração de propostas. Além disso, estão definidas competências específicas. Para a matemática tais competências são:

1. “construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.”
2. “Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.”
3. “Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.”
4. “Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.”
5. “Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.”

---

[4] No Brasil, 3/4 da população vive na zona urbana. De que outra forma podemos representar esta fração? (A) 15% (B) 25% (C) 34% (D) 75%

[5] Sigla apresentada pelo autor com letras minúsculas, mas que se refere a IDEB (Índice de desenvolvimento da Educação Básica)

> 6. “Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.”[6]

Cada uma dessas competências abrange um conjunto de habilidades associadas tanto à própria competência quanto aos eixos cognitivos.

No último ENEM, realizado em 2016, apesar de a Matemática ter sido a área com desempenho máximo atingido maior que o das demais áreas (991,5), foi a segunda com menor média (489,5)[7]. Embora esta tenha sido maior que a obtida no ano anterior, o histórico revela um linha de tendência decrescente na média obtida nas provas de matemática.

Além disso, 5734 participantes zeraram a prova da área de matemática, um número bastante superior aos das demais áreas, pois 1804 zeraram a prova de ciências humanas, 3109, a de ciências da natureza e 3862, a de linguagens. Ou seja, se comparada às demais áreas, a Matemática apresenta um alto índice de pessoas ao final da educação básica com relevantes dificuldades no que compete a sua aprendizagem.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), no caso da unidade temática Números, uma maneira de contornar as dificuldades a eles relacionadas é através de situações que revelem os números como eficazes na resolução de determinados problemas. Situações em que:

> o aluno perceberá a existência de diversos tipos de números (números naturais, negativos, racionais e irracionais) bem como de seus diferentes significados, à medida que deparar com situações-problema envolvendo operações ou medidas de grandezas, como também ao estudar algumas das questões que compõem a história do desenvolvimento do conhecimento matemático. (BRASIL, 1998, 50)

Assim, não basta ter contato com os números, é preciso compreender seu significado seja por contextualização, seja por necessidades presentes na história de suas construções. Mas além disso, consideramos que características próprias de cada um desses conjuntos são da mesma forma essenciais a sua compreensão.

---

[6] http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2012/matriz_referencia_enem.pdf

[7] A nota mínima para quem solicita certificação no ensino médio a partir do ENEM (autorizada a partir de 2010, porém descontinuada em 2017) é 450.

CAPÍTULO II: NECESSIDADE VERSUS DIFICULDADES

Comumente, usamos os números naturais antes mesmo de iniciarmos nossa vida escolar. Aprendemos a contar com os dedos, pronunciando e associando cada nome dos primeiros números desse conjunto a objetos que envolvemos num processo de contagem. Quando iniciamos nossos estudos formais, já temos em nossa memória pelo menos os nomes dos primeiros números naturais e em série ordenada. Na escola, o conhecimento dos números naturais e sua construção são desenvolvidos e

> Quando percebemos que o que foi feito uma vez sempre pode ser repetido, completamos a série numérica com um "e assim por diante". E assim julgamos completada nossa educação sobre contagem, sem ao menos perceber que plantamos na mente a idéia da infinidade. (BARCO, 1988, p.01).

Alcançado o conhecimento dos números naturais, nos são apresentadas situações que demonstram a insuficiência desse conjunto numérico para, assim, conhecermos os números inteiros e também os racionais.

Se retomarmos a ideia do 'antes da vida escolar', nesta fase, temos a percepção de diferenças entre tamanhos, ou seja, há um prévio conhecimento numérico que não se restringe à contagem, mas tem relação com medidas também. Todavia, tem sido comum considerarmos que o conhecimento e entendimento dos números racionais sustentam-se numa ideia distinta da construção dos naturais e dos inteiros no sentido de que eles relacionam-se a medidas e não mais a contagem. Sob esta perspectiva, estaríamos saindo do discreto a caminho do contínuo, com a necessidade de se compreender, em meio a essa passagem, a noção de densidade advinda com os números racionais.

Um conjunto discreto é quando entre dois de seus elementos não há nenhum outro, como ocorre no caso dos números naturais e dos inteiros. Diferentemente do que ocorre com um conjunto denso. Entre dois elementos deste tipo de conjunto, há uma infinidade de outros elementos, como no caso dos números racionais e também dos irracionais. Portanto, discreto está relacionado à contagem ao passo que a característica de ser denso tem relação com medição, ação fortemente presente na origem dos racionais. A medição também conduz à ideia de conjunto contínuo.

Convencionalmente, faz-se esse tipo de categorização: discreto, denso, contínuo. Mas, segundo Brolezzi (1996), separar discreto e contínuo não é favorável à aquisição da noção de números em seu sentido completo.

> No ensino de Matemática elementar, muitas vezes constata-se a tendência de se tentar optar, em cada assunto, por um ou outro aspecto, sem explorar a relação entre eles. Dessa maneira de encarar o discreto e o contínuo como realidades completamente disjuntas surgem conseqüências graves para o ensino, e perde-se muito da riqueza da Matemática. Verifica-se assim a existência de um problema no ensino de Matemática elementar, ocasionado pela tendência de se optar ora pelo discreto ora pelo contínuo, fazendo sucumbir um em função do outro. (BROLEZZI, 1996, p.2)

Em sua tese, Brolezzi (1996) buscou, a partir de dados históricos, mostrar que as características de discreto e contínuo sempre estiveram presentes na Matemática, em especial, na construção da noção de números. Ele ressalta que no estudo de números racionais e reais, "sente-se de modo determinante a falta de uma abordagem que leve em conta a relação entre discreto e contínuo." (BROLEZZI, 1996, p.3). Para ele, a origem dos números não se traduz na concepção amplamente conhecida que separa o discreto e o contínuo ao afirmar que a ação de contar tenha sido a gênese numérica. O autor defende que a ideia de maior e menor teria sido anterior em ações de comparação de quantidades, estando contagem e medidas imbricadas na origem da ideia de números. E, portanto, nos primórdios, o homem tanto contava quanto media. Dois aspectos de grande relevância no ensino e compreensão de números racionais, precisando ser trabalhados em interação, conforme considera Brolezzi (1996).

Assim, vejamos a seguir algumas informações sobre essa origem dos números, especialmente dos naturais e dos racionais, ressaltando a perspectiva de que a partir das dificuldades se fizeram as necessidades. E, observando o sentido oposto, ou seja, as necessidades culminando em dificuldades, apresentamos, logo após, pesquisas que discorrem sobre tais dificuldades no que diz respeito aos números racionais.

2.1 Da Dificuldade à Necessidade: o que nos aponta a história?

A história comumente vista nos livros a respeito da origem dos números nos diz que os números naturais correspondem ao primeiro conjunto numérico utilizado ao longo da evolução do homem, tendo surgido mediante o senso numérico humano e, então, sua necessidade de contar elementos da natureza. Sendo esta, possivelmente, a origem de sua denominação (naturais). (RORIZ, 2014).

> Curr, que efectuou um completo estudo da Austrália primitiva, afirma que entre os nativos, só poucos conseguem distinguir quatro e nenhum

> australiano no estado tribal consegue distinguir sete. Os bosquímanos da África do Sul não têm, na sua língua, outros numerais além do um, dois e vários, e mesmo estes são tão mal definidos que é lícito perguntar se os nativos lhe atribuem um significado específico. (ARAUJO, 1998, P. 13).

Estudos como esse fornecem indícios de como nós, humanos, começamos a trabalhar com números naturais. Assim, nos primórdios da história humana, não teria havido uma contagem propriamente dita, pois as quantidades se restringiam a um, dois e muitos, uma vez que estava associada ao senso numérico que permitia ao homem perceber quantidades e alterações que nelas ocorriam. A contagem, de fato, teria surgido mais tarde com a ação de corresponder um-a-um, ou seja, para cada elemento a contar, um pedra correspondente ou traço marcado em um osso, por exemplo. Foram encontrados fósseis com essas características, marcações de contagem, que datam de mais de 30 mil anos atrás. (ALMEIDA, 2015). A contagem está atrelada à necessidade de agrupamentos e, com estes, os símbolos, principalmente, associados ao corpo como o fato de cada grupo de cinco corresponder a uma mão; de dez, duas mãos.

A história nos aponta ainda que foi diante de insuficiências nas representações para as situações do dia-a-dia, que os novos conjuntos numéricos fizeram-se necessários.

Algumas conjeturas podem ser realizadas também em relação ao aparecimento desses conjuntos. Em relação aos inteiros, por exemplo, Caraça (1951) sustenta que a necessidade de números negativos só teria aparecido quando a propriedade se transforma, de coletiva para privada. E argumenta que, se os bens eram de todos, não haveria espaço para a figura da dívida, que só se observaria então quando as propriedades são particulares e os bens dos indivíduos não são equivalentes. O mesmo autor sustenta que a partir da necessidade de representar uma medida de maneira mais exata, a humanidade teria desenvolvido a ideia de parte de um todo e, através dos tempos, evoluído para o conceito de número racional.

Consideramos também que, assim como os naturais, os inteiros e racionais também vieram de necessidades humanas, mediante certo desenvolvimento de uma vida em sociedade. Entretanto, as informações históricas sobre o aparecimento desses conjuntos numéricos não são divulgadas com a mesma intensidade e coesão como no caso da história dos naturais. As hipóteses históricas referentes aos inteiros e aos racionais, na maior parte dos casos, aparecem de maneira simplista, especialmente em se tratando dos livros didáticos.

Sem abrir mão dessa reflexão, observamos que o conteúdo frações é apresentado logo após os naturais em livros do ensino fundamental menor e também em livros do 6º ano.

Já nos livros do ensino fundamental maior após 6º ano, a sequência é modificada, com a introdução dos inteiros entre os naturais e os racionais. Talvez a ideia que esteja por trás dessa escolha ainda seja um reflexo da matemática moderna, já que os conjuntos são apresentados com o sentido de que um está contido no outro, mantendo-se a ideia de sucessor para os inteiros, mas sem qualquer menção a respeito para os racionais. Um hipótese interessante que gostaríamos de considerar é o fato de que a precedência histórica é provavelmente dos racionais em relação aos inteiros, pois a necessidade de medir deve ser anterior à necessidade de negociar, na história humana.

2.2 Da Necessidade à Dificuldade: o que revelam pesquisas sobre o ensino-aprendizagem do números racionais?

Foi diante de dificuldades de alunos do ensino médio na aprendizagem de funções, que Gonçalves (2014) notou erros comuns originados na concepção desses alunos em relação aos números racionais e desenvolveu sua pesquisa de especialização em Educação Matemática sobre o reflexo de dificuldades com números racionais na aprendizagem de funções. Por meio de sua pesquisa, a autora constatou lacunas na aprendizagem desse conjunto numérico que afetam aprendizagens futuras. Com os dados que obteve, a autora aponta que a maioria dos alunos que responderam ao questionário aplicado considera como números racionais apenas os fracionários, muito embora tais alunos demonstraram não compreender o significado de fração quando colocada em questões que requeriam interpretação. Com estas questões, houve dificuldades também em operações com frações.

> Os alunos, ao invés de encontrarem o MMC, eles adicionaram os numeradores e os denominadores, não compreendendo que os números são partes de um todo e não números naturais isolados. Tal erro envolve muito mais que uma simples falta de atenção e sim uma dificuldade na compreensão do conceito. (GONÇALVES, 2014, p 32)

As dificuldades com números racionais repercutem em questões relacionadas a outros temas, corroborando o fato de tais dificuldades afetarem a aprendizagem de outros conteúdos, a exemplo de funções.

Segundo a autora, “a compreensão destes conhecimentos: os números racionais, [é] temida por grande parte dos alunos e a responsável por grande parte do insucesso escolar” (GONÇALVES, 2014, p. 13)

Dificuldades de alunos do ensino médio com os números racionais também foram verificadas por Oliveira (2016) em sua pesquisa apresentada no XII Encontro Nacional de Educação Matemática. A autora desenvolveu sua pesquisa tendo como participantes alunos do 9º ano do ensino fundamental e também alunos do 3º ano do ensino médio e constatou que apesar de compor o currículo da educação básica desde o ensino fundamental, os números racionais são acompanhados por dificuldades em sua aprendizagem que persistem e se fazem presentes até mesmo no final do ensino médio. Sua pesquisa concentrou-se na representação fracionária dos números racionais e no que chamou de ‘representação ponto racional’, referindo-se ao ponto da reta numérica que corresponde a todo e qualquer número racional. A autora ressalta outros trabalhos de Valera (2003), de Severo (2008), de Lima (2013), que apontam para dificuldades quanto à localização de números racionais na reta numérica, estejam eles na forma decimal ou fracionária, bem como trabalhos que retratam problemas quanto à distinção entre numerador e denominador de frações. Dessa forma, o problema se constata e permanece ao longo dos anos, apesar de até mesmo documentos oficiais, como os PCN, salientarem a forma como se apresentam os números naturais como um possível obstáculo para a compreensão dos números racionais.

Em relação aos aspectos apontados nas diversas pesquisas que abordou, Oliveira (2016) correlacionou cada dificuldade identificada, com o que versam os documentos oficiais a respeito. Por exemplo, localização na reta numérica, noção de equivalência no que diz respeito à comparação entre racionais na forma fracionária e também à ideia de um mesmo racional ter infinitas representações. A partir desse levantamento, a autora desenvolveu atividades para aplicação junto a alunos dos dois níveis de escolaridade alvos de sua pesquisa. Erros considerando-se fração como dois números distintos justapostos e erros de alunos que demonstraram saber que fração é divisão mas não saber localizar na reta um número racional após convertê-lo para sua forma decimal, foram identificados tanto entre alunos do 9º ano quanto alunos da 3ª série. Foram apontados também erro de inversão entre numerador e denominador. Enfim, diversos erros que se estendem ao longo dos anos, conforme resultado alcançado pela autora.

A pesquisa de Pereira e Zúñiga (2015) da mesma forma alcançou dificuldades referentes à forma fracionária dos números racionais mediante análise de erros. Os participantes foram alunos da 1ª série do ensino médio. E a conclusão do trabalho novamente aponta que “as dificuldades ultrapassam o ensino fundamental. As dúvidas que, teoricamente deveriam ser sanadas quando ainda estavam no ensino fundamental passam a bloqueá-los no andamento dos seus estudos do ensino médio.” (PEREIRA; ZÚÑIGA, 2015, p. 4). No decorrer do trabalho, as autoras ressaltam a importância dos números racionais serem desenvolvidos a longo prazo para o devido alcance do conceito de frações e diminuição de dificuldade de uso desse conteúdo em diferentes contextos.

Dentre os erros encontrados por Pereira e Zúñiga (2015) estão alguns relacionados às frações mistas e às operações entre frações e, como em sua metodologia as autoras fizeram uso de variadas situações-problemas, identificaram significativa deficiência também na interpretação de problemas. Além disso, pelas análises realizadas, acreditam que é preciso respeitar uma sequência no ensino de maneira que conteúdos posteriores ao processo de aprendizagem dos números racionais não sejam encarados como algo extremamente difícil.

Se tais dificuldades concentram-se em conceitos básicos, certamente o desenvolvimento de novos conceitos tendem naturalmente a não serem bem sucedidos e as possibilidades de consolidar a aprendizagem desses conteúdos matemáticos tornam-se cada vez menores. Por conseguinte, a tendência que se apresenta é a de que a motivação, o rendimento e o desempenho em matemática se limitem ao sofrível, como temos visto em pesquisas e avaliações de larga escala.

Consideramos que, dentre os conteúdos básicos, o tema números é extremamente fundamental a todo o desenvolvimento das habilidades matemáticas. Saber como o conjunto dos números racionais é formado e que a ideia de sucessor não é regra de formação para todo e qualquer conjunto numérico, por exemplo, são pontos que certamente iriam auxiliar na compreensão de representações numéricas, medidas e quantidades.

CAPÍTULO III: METODOLOGIA

As principais fontes para o desenvolvimento desta pesquisa foram a consulta e análise dos livros didáticos, “importante instrumento de apoio ao trabalho do Professor e referência na formação dos mais de 50 milhões de crianças e adolescentes matriculados em Escolas públicas e privadas” (QUADROS, 2013).

O livro didático começou a ter uma atenção especial do governo federal no Brasil em 1929, quando foi criado o Instituto Nacional do Livro (INL). Nos anos seguintes, foram promulgadas leis referentes à escolha, produção e distribuição de livros didáticos; foram realizados acordos para a garantia de seu financiamento e distribuição gratuita; dentre outras ações. Nos anos 70, foi instituído o Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental (PLiDEF) sob responsabilidade do INL e, posteriormente, da Fundação Nacional do Material Escolar, que também deixou de existir, em 1983, e foi substituída pela Fundação de Assistência ao Estudante (FAE).

Houve ao longo dos anos, participação financeira dos estados brasileiros no programa do livro didático. Ocorreu também uma fase de insuficiência de recursos resultando na redução de escolas contempladas pelo programa. Mas, nos anos 80, procurou-se ampliar esse programa. Assim, assumindo o compromisso de distribuir livros didáticos a todos os estudantes das escolas públicas do 1º grau (atual ensino fundamental), o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) substituiu o PLiDEF, a partir de 1985. Com o PNLD, estabeleceu-se análise e indicação dos livros didáticos pelos professores, reutilização de livros adquiridos, fim da participação financeira dos estados, etc.

Em 1997, a FAE foi extinta e substituída pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), ampliando-se o programa e procurando-se a aquisição de livros didáticos de forma continuada. Desde então, o programa tem crescido promovendo distribuição de livros didáticos em Braille quando há alunos com deficiência visual devidamente matriculados na escola, atendimento ao ensino médio e à Educação de Jovens e Adultos (EJA) e, mais recentemente, aquisição de materiais digitais.

Dessa forma, o PNLD é um dos programas mais antigos em nível nacional e, em prol da melhoria na qualidade do ensino na educação básica, procura distribuir gratuitamente livros didáticos previamente avaliados e indicados a todas as escolas da rede pública do país.

A avaliação pedagógica dos livros é feita por especialistas sob coordenação da Secretaria de Educação Básica, do Ministério da Educação. Após análise, é elaborado o guia de livros didáticos com resenhas dos livros aprovados, escritas pelos especialistas que avaliam os livros. Esse guia é enviado pelo FNDE em formato impresso às escolas e também disponibilizado no portal do órgão, na internet. Dispondo desse guia, diretores e professores precisam analisar e escolher o livro a ser utilizado na escola, enviando essa informação ao FNDE via internet.

No ano passado foram mais de 117 mil escolas beneficiadas pelo programa e as coleções mais distribuídas para as séries finais do Ensino Fundamental foram:

Tabela 2: Coleções de livros didáticos mais distribuídas pelo PNLD 2017 para os anos finais do ensino fundamental

NOME DA COLEÇÃO	QTDE DE EXEMPLARES
PRATICANDO MATEMÁTICA	2 808 812
VONTADE DE SABER	2 081 216
MATEMÁTICA - COMPREENSÃO E PRÁTICA	1 334 022
PROJETO TELÁRIS – MATEMÁTICA	1 325 800
MATEMÁTICA – BIANCHINI	1 083 933
PROJETO ARIBABÁ – MATEMÁTICA	673 373
CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICAS	596 310
MATEMÁTICA NOS DIAS DE HOJE NA MEDIDA CERTA	391 852
DESCOBRINDO E APLICANDO MATEMÁTICA	240 062
MATEMÁTICA: IDEIAS E DESAFIOS	145 896
MATEMÁTICA DO COTIDIANO	102 749

Fonte: FNDE, dados estatísticos PNLD 2017-coleções mais distribuídas, p. 3

Dispondo de exemplares dos livros *Matemática, ideias e desafios* (6º ano); *Descobrindo e Aplicando Matemática* (6º, 7º e 8º anos); *Matemática nos Dias de Hoje* (6º e 7º anos); *Projeto Teláris – Matemática* (6º ano), fizemos análise dos mesmos. Mais precisamente, de como são apresentados os Números Naturais e os Números Racionais. Além desses livros, indicados pelo PNLD, optamos por analisar também os livros *Matemática*, de Silveira e Marques, e *Matemática Hoje é Feita Assim*, de Bigode, publicados nos anos 1995 e 2000, respectivamente, com o propósito de conhecer como tais livros de mais de uma década apresentam os referidos conteúdos.

Os seguintes aspectos foram observados: a sequência de tópicos apresentada tanto para os números naturais quanto para os números racionais, o uso ou não da simbologia N e Q, a representação na reta, o uso da ideia de sucessor e da expressão ‘infinito’.

Além disso, foram realizadas buscas bibliográficas, leituras e discussões de textos que tratam de dificuldades relacionadas à aprendizagem dos números racionais e da realidade de desempenho em matemática de estudantes da educação básica, bem como textos que tratam de aspectos da história dos conjuntos numéricos focados nesta pesquisa. Discussões que nos permitiram salientar a problemática reincidente que envolve o ensino-aprendizagem dos números, conforme retratamos até agora. Assim, desenvolvemos uma pesquisa exploratória e bibliográfica. Segundo Gerhardt e Silveira (2009), uma pesquisa exploratória visa “proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torna-lo mais explícito”, ao passo que uma pesquisa bibliográfica é aquela que é “feita a partir do levantamento de referências teóricas já analisadas, e publicadas por meios escritos e eletrônicos, como livros, artigos científicos, páginas de web sites.” (FONSECA *apud* Gerhardt e Silveira, 2009).

CAPÍTULO IV: ANÁLISE DAS OBRAS DIDÁTICAS

Segundo os PCN (BRASIL, 1998), existe viabilidade de tratar os números sob diferentes representações nos terceiro e quarto ciclos. Não obstante, os números racionais devem ser conhecidos sob as formas de frações, decimais, explorando-se seus significados. Nesse documento, são reconhecidas as dificuldades de aprendizagem relativas a esses números considerando a possibilidade de relação dessas dificuldades com as ideias aprendidas em relação aos números naturais como, por exemplo, o fato de que cada racional pode ter várias escritas fracionárias, o que não ocorre com cada natural. Além disso, o fato de se considerar a quantidade de algarismos como referência para se julgar qual é maior entre os naturais, não ocorrendo da mesma forma com os racionais (0,28, por exemplo, é menor que 0,3).

Mais uma observação levantada nos PCN (BRASIL, 1998) em relação a tais dificuldades, advindas desse conhecimento em relação aos naturais, é o estabelecimento de sucessor e antecessor não fazer sentido entre os racionais, tendo em vista sua característica de ser um conjunto denso, ou seja, "uma vez que entre dois números racionais quaisquer é sempre possível encontrar outro racional; assim, o aluno deverá perceber que entre 0,8 e 0,9 estão números como 0,81, 0,815 ou 0,87." (BRASIL, 1998, p 101).

Nesse contexto, como já foi apontado anteriormente, selecionamos alguns livros indicados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), com o objetivo de analisarmos como o conjunto dos racionais é apresentado.

4.1 Matemática nos Dias de Hoje, de Centurión de Jakubovic

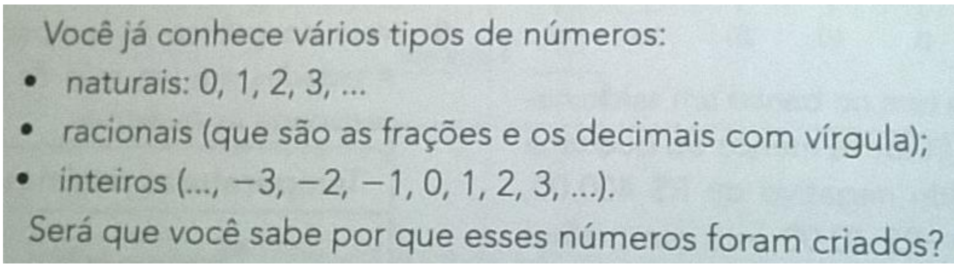
O livro do 7º ano da coleção *Matemática nos Dias de Hoje* abrange oito capítulos dos quais os dois primeiros estão voltados para a temática Números. O primeiro trata dos números inteiros e o segundo, dos números racionais.

Cada capítulo é subdividido em tópicos relacionados a seu conteúdo e é permeado por exercícios e também sugestões de atividades e/ou curiosidades (trecho histórico, relação com outras áreas, etc).

Em relação aos números inteiros, os autores Centurión e Jakubovic (2015) iniciam o capítulo com um problema que requer o uso de números negativos (temperatura) e, então, apresentam outras situações do cotidiano que envolvem o uso de números negativos. Fecham com a seção ‘o conjunto dos números inteiros’ na qual fazem a representação, enquanto conjunto, de $\mathbb{N}$ e Z juntamente com tais símbolos. Somente após esta etapa, acompanhada de exercícios e sugestão de jogo, os autores fazem uma representação geométrica dos números inteiros, ou seja, recorrem ao uso de uma reta na qual marcam pontos correspondentes aos números inteiros ressaltando a distância entre tais pontos e a possibilidade de comparação quanto ao sentido de crescimento e determinado número ser maior ou menor que outro. Aproveitam a representação na reta para falarem da oposição/simetria entre os números relacionando à distância a partir do zero, e também para explicarem sobre módulo. “O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc” (BRASIL, 1998, p. 51)

Ao iniciarem a seção sobre um pouco de história relacionada aos inteiros, os autores informaram:

Figura 4: Apresentação de tipos de números no livro *Matemática nos dias de hoje*, do 7º ano



Você já conhece vários tipos de números:

- naturais: 0, 1, 2, 3, ...
- racionais (que são as frações e os decimais com vírgula);
- inteiros (..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, ...).

Será que você sabe por que esses números foram criados?

Fonte: Centurion e Jakubovic, 2015, p. 18

Observa-se representações distintas para os três conjuntos, por sua vez, sem terem sido chamados de conjunto e sim de tipos de números.

Após isso, os autores começam a tratar das operações (adição, subtração, multiplicação e divisão exata) e suas propriedades fazendo uso de círculos vermelhos para indicarem os números negativos e verdes para os positivos, como forma de facilitar a compreensão do processo que envolve, de certa forma, as regras de sinais.

No momento de abordarem a divisão, explicaram que uma divisão exata é quando: “existe um número natural que multiplicado por 7 [do exemplo usado pelos autores], dá 126. Esse número é 18. Com essa ideia, efetuamos divisões de números inteiros.” (CENTURION; JAKUBOVIC, 2015, p. 36).

Nada é mencionado sobre divisões não exatas, o que deixa em aberto a possibilidade de o aluno questionar: ‘e se não for exata?’. Contudo, a resposta a ser dada com o capítulo seguinte, só viria mais tarde, já que após o estudo da divisão exata de inteiros, os autores tratam ainda de potenciação e raiz quadrada, que é quando fazem uma definição mais abstrata com representação generalizada para potências. Ou seja, uma linguagem mais abstrata teve espaço e uso pelos autores. Mas será que usaram também para os números racionais mais à frente?

Diferentemente do capítulo dos números inteiros, o dos racionais é introduzido com a relação entre os sons e o fracionamento de uma corda, ligando tal relação ao nome de Pitágoras.

Inicialmente, os autores optam por retomar os estudos de frações enquanto divisões de um todo ilustrando com barras de chocolate e enquanto medida, ilustrando com uma imagem de régua marcada. Retomaram a ideia de frações equivalentes, operações entre frações com sugestões de exercícios e problemas, as formas decimais das frações e operações com tais formas. Somente após essa revisão de conteúdo de anos anteriores é iniciada a seção intitulada 'números racionais'. Eles voltam a chamar de tipo de número, atribuindo a toda fração o nome de racional e afirmam: "todo número racional é o resultado de uma divisão de números inteiros" (CENTURIÓN e JAKUBOVIC, 2015, p. 69).

Os autores ressaltam que, embora tenham trabalhado apenas com os positivos desse tipo numérico, ele abrange frações negativas também. Seguindo o modelo que usaram para organizar o capítulo sobre os inteiros, os autores reservaram duas subseções para esse capítulo de racionais denominadas 'O Conjunto dos Racionais' e 'Representação Geométrica'. Ao tratarem como conjunto, apresentam o símbolo Q afirmando relacionar-se com o termo 'quociente' e dizendo que esse conjunto reúne as frações ou decimais positivos e negativos e também o zero. Sem fazer a representação do conjunto, apenas exemplificam: "Assim, são elementos do conjunto Q números como -5,7; ¾; -¾ ou 0" (idem, p.70). Observa-se o detalhe de que os autores usaram a conjunção 'ou'. Como esta conjunção é comumente usada com sentido de exclusão, não parece apropriado usá-la no exemplo dado pelos autores.

Centurión e Jakubovic (2015) complementam a subseção ressalvando que os inteiros resultam de divisões entre inteiros e que, portanto, também são racionais. Na reta, fazem a representação subdividindo espaços entre os inteiros, sem justificarem porque subdividiu em dez partes iguais para fazer a possível localização de 1,7 (exemplo usado) e sinalizam que tendo um racional na forma de fração, pode-se transformá-lo em decimal para facilitar a localização na reta fazendo-se uma aproximação, caso necessário e conforme a precisão do desenho feito. Ou seja, deram preferência em sugerir a aproximação de 2,83333 para 2,8 num processo de localização na reta numérica, a apresentar a ideia de que pode haver mais divisões dentro das divisões. E assim a densidade do conjunto é, de certa forma, omitida.

Nas seções e subseções seguintes, são tratados os simétricos/opostos, a comparação entre racionais no sentido de identificar o maior ou menor entre eles com o auxílio da reta bem como com uma dica de recorrer ao módulo. Tratam ainda das operações com esses números ressaltando a ordem de efetuação quando se tem uma expressão numérica com ou sem parênteses, por exemplo, e comparam uma divisão inexata em Z com a mesma divisão em Q tanto em sua forma decimal como fracionária incluindo a propriedade de divisão em Q. Há uma seção sobre média aritmética (simples e ponderada) com foco no caso de notas escolares, mas seguida de exercícios com outros casos de uso de média. Por fim, potenciação de racionais, com definição generalizada como fizeram ao tratar dessa mesma operação com os inteiros, e raiz quadrada.

Assim, temos estrutura e organização dos capítulos que seguem um padrão didático próximo ao tradicional (parte conteúdo seguido de parte exercícios e problemas). Nos dois capítulos analisados, percebemos a tentativa de retomada, pelos autores, com afirmações do tipo: “já vimos que”. Entretanto, ao considerarem os racionais como conjunto numérico não retomam a forma de representação usada para os naturais e inteiros: como conjuntos. Consequentemente, não explicam o porquê de não representarem com ‘pontinhos’ que indicam a infinitude mencionada quando representaram os conjuntos anteriores. Nem mesmo ao representar geometricamente, informam sobre a possibilidade de mais e mais números (densidade). Na verdade, sugerem ‘aproximar’ o valor para poder indicar a posição na reta.

Quanto ao livro do 6º ano dessa coleção, Centurion e Jakubovic (2015) também o organizaram em oito capítulos. O primeiro deles trata dos números naturais. Depois são abordados conteúdos de geometria, sequências numéricas, divisibilidade e MMC/MDC antes de entrarem nos capítulos relacionados aos números racionais. Dois deles, o quinto e o sexto, são voltados a tais números. No capítulo 5, intitulado ‘frações e decimais’, as frações são relacionadas à porcentagem, e também com a forma decimal. No capítulo 6, denominado ‘operações com números racionais’, são apresentadas as operações básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão primeiramente envolvendo frações e mais adiante envolvendo somente números na forma decimal.

Nesse livro do 6º ano, os autores iniciam o capítulo referente aos números naturais afirmando que o leitor (aluno) já deve ter tido contato com diversos números (fracionários, negativos, por exemplo), mas que neste capítulo o estudo será voltado a números positivos. Centurion e Jakubovic (2015) apresentam a ideia de sucessor, antecessor e números consecutivos para a obtenção de números naturais, falam do uso de símbolos como <, > e = para a realização de comparações entre dois números e brevemente falam da representação dos números naturais sob o sistema de numeração decimal, justificando o uso da palavra decimal. Então, abrem uma caixa de texto para apresentarem um pouco da história envolvida com o sistema indo-arábico, também conhecido como decimal. Nesse capítulo, os autores informam também que em textos de jornais, por exemplo, os números naturais podem ser apresentados com vírgula, como uma forma abreviada e, então, apresentam um texto de notícias do IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) com números como 3,9 milhões e 6,1 milhões.

Com as operações, eles apresentam cada uma em subseções com títulos que indicam o sentido de cada operação (‘juntando, quanto dá?’, ‘qual a diferença’) e apresentam a forma de armação e realização da operação indicando o nome que cada número envolvido em determinada operação recebe, como minuendo, subtraendo e diferença, no caso da subtração. A adição e a subtração também são tratadas usando a representação em reta. Representação que não é usada para a multiplicação e divisão.

São também abordadas as propriedades da adição e da multiplicação, bem como da subtração e da divisão informando que para estas duas não vale a propriedade comutativa para os números naturais. Então, seguem para potenciação e raiz quadrada antes de proporem diversos exercícios. Encerram o capítulo e entre este e o capítulo envolvendo números racionais, abordam outros conteúdos, conforme dito acima.

O primeiro capítulo envolvendo números racionais é sobre frações. Estas são apresentadas sob a ideia de parte de um todo, usando figuras divididas ou coleção de objetos sendo particionada. Um pouco de história sobre a origem das frações é apresentada logo após alguns exercícios relacionados à parte inicial, alguns envolvendo inclusive figuras geométricas. Depois as frações são relacionadas à porcentagem, havendo um pouco antes a apresentação de como deve ser a leitura de frações.

No mesmo capítulo, também são tratadas frações equivalente definidas apenas como representantes de uma mesma porção de algo, havendo novamente o uso de figuras geométricas divididas para ilustrar a equivalência entre determinadas frações e logo depois também para ilustrar o processo de simplificação de frações. Alcançando dessa forma, a definição de fração irredutível. Após isso, há uma seção intitulada ‘números racionais’, por sua vez iniciada com a seguinte observação feita pelos autores: “Muita gente, quando começa a conhecer as frações, tem a impressão de que elas relacionam dois números. [...] Não é errado pensar assim, mas na verdade, 2/3 é um número só, embora não seja um número natural. É um **número racional**.” (CENTURION; JAKUBOVIC, 2015, p. 154, grifo do autor).

Assim, os autores falam dos números racionais como resultado de uma divisão, sendo os naturais também racionais, e em uma caixa de texto informam o significado da palavra racional. Em nova seção, eles explicam os números decimais como sendo a forma mais usual dos números racionais e apresentam uma ilustração com preços em forma de fração, afirmando que a forma decimal é melhor para realizar-se comparações entre esses números.

Os autores exploram ainda as denominações dos algarismos de um número racional na forma decimal, conforme cada posição, tratam da conversão de fração em decimal, as dízimas periódicas, a comparação entre números na forma decimal, e citam exemplos de uso no cotidiano.

Foi possível perceber com esse capítulo, que os autores dedicaram-se mais à forma decimal dos números racionais. Certamente pela observação feita nos PCN quanto a essencialidade do estudo da representação decimal: “Ao abordar os racionais pelo seu reconhecimento no contexto diário, deve-se observar que eles aparecem muito mais na forma decimal do que na forma fracionária.” (BRASIL, 1998, p. 103)

Para tratar das operações com os números racionais, os autores abordaram cada uma delas com as frações e posteriormente com os decimais. Também fizeram uso de figuras geométricas para ilustrar cada uma das operações. Ao iniciar a seção sobre as operações com os números decimais, os autores reforçam que “os números decimais são outro modo de escrever as frações. Ambos, decimais e frações, são diferentes representações dos **números racionais**”. (CENTURION; JAKUBOVIC, 2015, p. 188, grifo do autor) e usam a característica do sistema numérico ser posicional, para demonstrar a forma de armar contas e realizá-las. Diversos problemas envolvendo os números racionais tanto na forma fracionária quanto na forma decimal são propostos para resolução ao final do capítulo, porém em blocos, ou seja, sem haver mistura entre ambas. A comparação entre dois números racionais na forma de fração não é mencionada pelos autores, eles dão dicas de como fazer comparação entre tais números na forma decimal. Também não fazem uso da reta numerada. Assim percebemos que não foi abordada a densidade entre dois números racionais. Contudo, os autores procuram reforçar bem o fato de que tanto frações quanto decimais, são representações de números racionais.

4.2 Projeto Teláris, de Dante

No livro de Matemática do 6º ano, do *Projeto Teláris*, o primeiro capítulo trata dos números naturais, sendo seguido por capítulo relacionado a operações com esses números e a relação deles com a geometria. São conteúdos da primeira unidade. Na segunda, Dante (2014), seu autor, trata de potenciação e divisibilidade, sendo que somente na terceira unidade aborda os números racionais, porém sem denominá-los de racionais. Dois capítulos compõem esta unidade: um aborda frações e o outro, decimais. Cada unidade é iniciada com uma imagem e um pequeno texto além de questões baseadas em ambos; e é encerrada com um bloco de exercícios relacionados a tratamento da informação, a outros contextos e revisão dos conteúdos vistos na unidade.

A primeira unidade é iniciada com imagem e texto relacionados à população e sua quantidade. Mas o primeiro capítulo sobre os números naturais é iniciado com uma notícia sobre o aniversário de Fortaleza, cidade brasileira. Nessa notícia, há diversos números e o autor destaca a presença dos números naturais em nosso cotidiano a partir dela. Em seguida, no capítulo, é trazido um pouco de história desses números relatando marcações em objetos, uso de desenhos e símbolos, o sistema de numeração egípcio e romano e após exercícios com estes dois sistemas, é apresentada a evolução da escrita dos símbolos do sistema de numeração indo-arábicos, também chamado de decimal, conforme indica o autor, seguindo para a apresentação de características que tornam esse sistema decimal (agrupamentos de dez em dez) e o fato de os algarismos terem valores posicionais. Assim, o autor começa a falar sobre classes e ordens antes de trazer exercícios a respeito. Logo após, fala das representações de um número natural (com algarismos, composta, com palavras, com palavras e algarismos juntos) e apresenta os números 219,3 mil e 2,15 milhões como exemplo de uma maneira simplificada de representar os números naturais, pois correspondem a 219 300 e 2 150 000, respectivamente.

Depois disso, o autor trata do uso de contagens, ordenações, códigos, medidas, traz exercícios e, então, numa seção específica intitulada “Conjunto dos Números Naturais”, apresenta a sequência desses números com a ideia de sucessor e antecessor, a reta numerada, e a ordem entre eles, considerando a ideia de antecessor para afirmar quando um número dado é maior que outro, e ainda, uma definição para números consecutivos. Depois, apresenta sequências que ele denomina de especiais: sequências de números pares, de ímpares, de quadrados perfeitos. Em outra seção, define conjuntos e faz a representação dos números naturais como conjunto, com seu símbolo N. Por fim, traz exercícios variados (mensagem codificada, localização, etc.), trata brevemente de raciocínio combinatório e encerra a unidade.

No capítulo seguinte, as operações básicas com os números naturais são abordadas apresentando, para cada uma, o que significam (juntar ou acrescentar quantidades no caso da adição; tirar, completar ou comparar quantidades no caso da subtração; adicionar parcelas iguais ou ideia associada à disposição retangular para obtenção de quantidades, no caso da multiplicação, além de número de combinações e proporcionalidade; e repartição igualitária, quantas vezes alguma quantidade cabe em outra, no caso da divisão). O autor apresenta, para a adição e para a subtração, utilizando o valor posicional, o procedimento de como armar uma conta. E, para a adição, aponta algumas de suas propriedades (comutativa, elemento neutro, associativa).

Mais adiante, após alguns capítulos sobre Geometria, Potenciação e Divisibilidade, é iniciado o conteúdo sobre os números racionais. A unidade é introduzida com um texto e questões sobre as fases da lua e o capítulo de frações e porcentagens é o primeiro da unidade. Ele é introduzido com um texto sobre uma passagem histórica que relata a necessidade de medição de terras às margens do rio Nilo pelos egípcios e logo depois uma notícia com uma fração em seu texto. Assim, o autor afirma que as frações surgiram para precisar medidas e que elas também podem ser representadas na forma percentual. Nesse ponto, consideramos importante afirmar certa estranheza em ver o autor falar em forma percentual tendo mostrado apenas 2/3 como exemplo de fração. Mas, na seção seguinte, o autor apresenta o que considerou serem as ideias associadas à fração: parte de algo, comparação entre números naturais, e quociente de dois números naturais.

Feito isso, apresenta a forma de leitura das frações e como transformar uma fração em números mistos. Além disto, usa a reta numerada em uma questão para localização de algumas frações e, a partir de exercícios, aborda frações próprias e impróprias.

Uma seção intitulada ‘Fração de um Número’ é iniciada com exemplos envolvendo dúzia de bananas, quantidade de carros e também recomendando o uso de calculadora. Outra seção sobre ‘Frações e Medidas’, que é seguida por frações equivalentes definidas como aquelas que “têm o mesmo valor em relação à mesma unidade” (DANTE, 2014, p.165) e é apresentada a relação entre elas como uma propriedade envolvendo divisão e multiplicação. Dessa forma, o autor segue para a definição de fração irredutível relacionando à simplificação. Ele reserva ainda uma seção para explorar um pouco mais sobre frações equivalentes na qual afirma que “podemos descobrir todas as frações equivalentes a uma fração dada” (idem, p.169).

Ainda no capítulo sobre frações, o autor trata da comparação entre frações fazendo representações gráficas para frações com numeradores 1 (um) a fim de tratar de comparações entre frações com numeradores iguais. Depois ele faz o mesmo para o caso de denominadores iguais. E, para o caso de numeradores e denominadores diferentes não faz representação gráfica, mas sugere o uso de frações equivalentes encontrando exaustivamente (ou por M.M.C., ou seja, mínimo múltiplo comum), de forma a deixar as frações com mesmo denominador.

Depois disso, o autor trata das operações com frações, fazendo uso de semirretas para a adição e subtração nos casos em que os denominadores são iguais. Do contrário, indica o uso de M.M.C. Fala ainda da fração inversa antes de abordar a divisão envolvendo frações. Ele poderia ter apontado o significado dessas operações como fez ao tratar dos números naturais, mas não o fez nessa unidade. Antes de encerrar o capítulo, o autor volta a falar em porcentagem. Desta vez em meio a problemas.

O capítulo seguinte é voltado aos números na forma decimal. O autor diz que números com vírgula com os quais nos deparamos no cotidiano são números na forma decimal.

Ele apresenta tais números recorrendo a figuras de termômetro e régua, associando-os, portanto, a medidas. Os sentidos de centésimo, milésimo são discutidos em seções individuais e, então, os números decimais são tratados relacionando ao sistema de numeração decimal, ou melhor, apresentando-os com a ideia de valor posicional. É feita posteriormente a relação entre número decimal e fração e depois como comparar números decimais entre si, sugerindo ‘igualar’ as casas antes da comparação ou fazer tal comparação por posição (primeiro verificando inteiros, depois décimos, centésimos, etc.). Por fim, são apresentadas as quatro operações com os números na forma decimal, situações envolvendo tais operações, a mudança de unidades quando o número decimal corresponde a uma medida, e porcentagem sob a forma de número decimal.

Dessa forma, o autor aborda os números na forma de fração e os números na forma decimal, mas não diz que essas são duas formas de representação de números denominados racionais. Até mesmo as passagens históricas, ele aponta separadamente como eventos isolados para fração, decimal, porcentagem. Ele não utiliza a representação de conjunto como fez com os naturais e sempre faz relação de fração com naturais como se não estivéssemos com outro conjunto numérico em estudo. E ainda, quando fala dos naturais, apresenta em um exemplo um número com vírgula, mas ao falar da representação decimal de números, define-os como números com vírgula.

4.3 Descobrindo e Aplicando a Matemática, de Mazzieiro e Machado

Da coleção *Descobrindo e Aplicando a Matemática*, de Mazzieiro e Machado (2015), foram verificados dois volumes: o do 6º e do 7º anos.

O livro do 6º ano é dividido em nove capítulos, dos quais os dois últimos abrangem apenas exercícios de revisão e atividades complementares com relação a cada capítulo anterior.

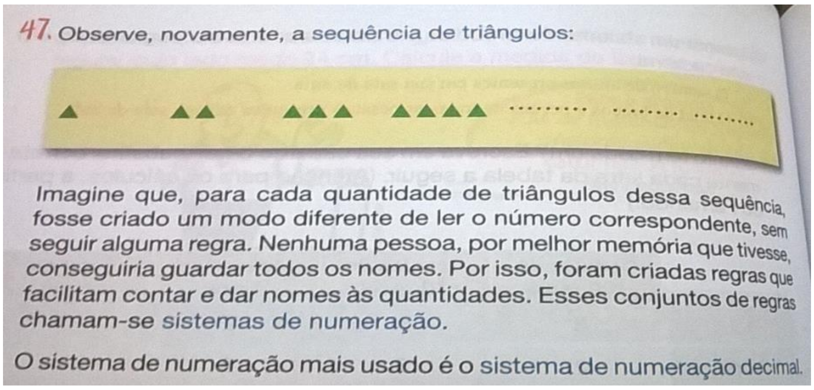
Os nomes dados aos sete capítulos de conteúdos sugerem que os autores consideram a presença dos números em todos eles: Figuras, Números e Gráficos; Figuras, Números e Medidas; Números Naturais e o Dia-a-dia; Medidas, Frações e Decimais; Números, Figuras e o Dia-a-dia; Medidas e o Dia-a-dia; Figuras, Números e Proporcionalidade.

A composição do livro é basicamente de problemas e atividades. Não se vê seções com definições sistematizadas em blocos distintos de blocos de exercícios. Os conteúdos se fazem presentes dentro dos problemas que compõem os capítulos. Além disso, Mazzieiro e Machado (2015) optaram por pulverizar os conteúdos misturando as unidades temáticas em cada capítulo, ou seja, também não separaram Números de Álgebra, de Geometria, etc. Para quem está acostumado à separação/delimitação entre conteúdo e atividades, será um desafio fazer uso desse livro. Uma possível característica positiva dessa "mistura" seria a contextualização dos conteúdos. Deu-nos a impressão de que a sistematização destes é deixada para o professor realizar após a resolução de problemas presentes no livro.

Contudo, os autores seguem um padrão de seções em cada capítulo: ‘explorando o que vocês já sabem’, ‘aprendendo em sala de aula’, ‘aprendendo em casa’. Na primeira, o título sugere que o aluno já tem conhecimento do que introduz o capítulo e, portanto, tal introdução vem com perguntas ao invés de afirmações, definições e exemplos, como uma tentativa dos autores de adotar a perspectiva de resolução de problemas viabilizando “aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade de gerenciar as informações que estão ao seu alcance.” (BRASIL, 1998, p.40)

No capítulo 2, os autores procuram dar sentido às frações com divisões de figuras planas bem como o significado para sua forma decimal associado a leitura desse tipo de representação. Apresentam questões com uso da imagem de partes de réguas milimetradas seguindo para o conteúdo de medidas. Mas nesse capítulo definem sistemas de numeração em uma das questões (p. 66):

Figura 5: Problema presente no livro *Descobrindo e Aplicando a Matemática*, do 6º ano.


47. Observe, novamente, a sequência de triângulos:

Imagine que, para cada quantidade de triângulos dessa sequência, fosse criado um modo diferente de ler o número correspondente, sem seguir alguma regra. Nenhuma pessoa, por melhor memória que tivesse, conseguiria guardar todos os nomes. Por isso, foram criadas regras que facilitam contar e dar nomes às quantidades. Esses conjuntos de regras chamam-se sistemas de numeração.

O sistema de numeração mais usado é o sistema de numeração decimal.

Fonte: Mazzieiro e Machado, 2015, p. 66

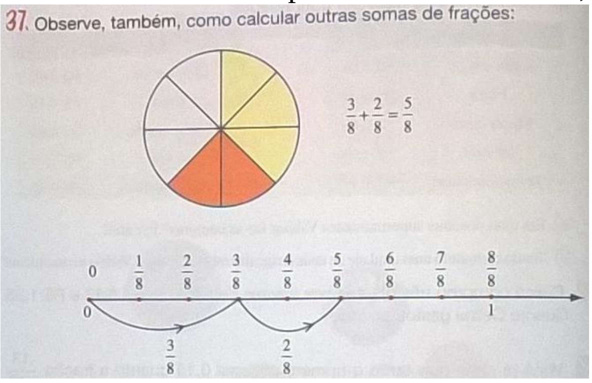
O capítulo 3 intitulado ‘Números Naturais e o Dia-a-dia’ é iniciado após a apresentação dos objetivos do capítulo com a representação de alguns números na casa das centenas (130, 133, 137, 139, 140, 148, 150, 160)[8] numa linha com sentido para direita que denominaram ‘reta numerada’ mas que chamaram de ‘semirreta’ logo em seguida no primeiro

[8] É, no mínimo, curioso Mazzieiro e Machado (2015) terem começado com números na cada das centenas, enquanto todos os outros autores começam pelas unidades.

dos questionamentos introdutórios do conteúdo. Trataram da forma ordinal e nomes, das operações básicas, mas sem qualquer definição formal, apenas usos e denominações.

No capítulo 4, voltam a falar em frações e decimais associados a medidas sempre explorando com exercícios e problemas. Nada de definição formal.

Figura 6: Exercício do Livro Descobrindo e Aplicando a Matemática, do 6º ano



Fonte: Mazzieiro e Machado, 2015, p. 66

No capítulo 5, algumas definições são apresentadas: "obtivemos uma fração que não pode ser mais simplificada porque o máximo divisor comum de seus termos (2 e 3) é 1. Por essa razão, esta fração é chamada de **fração irredutível**" (p.195, grifo do autor); "um número natural é divisível por outro número natural se é múltiplo desse outro." (p. 197).

Quanto ao sétimo capítulo, que também traz o termo "Números" em seu título, os autores relacionam valores numéricos à proporcionalidade definindo escala, grandezas diretamente proporcionais, 'por cento'.

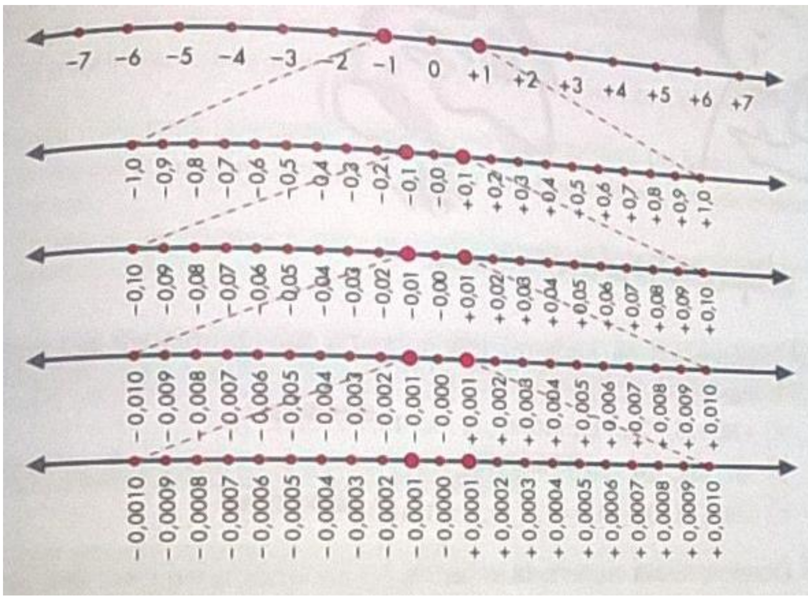
Enfim, os autores focam em resoluções de problemas e exercícios de técnicas de cálculos, sendo que em relação aos racionais o interesse está no uso desses números enquanto frações ou razão entre dois números ou grandezas, no uso de estimativas e aproximações, leitura e escrita e como realizar operações usando frações. Não foi localizada explanação relativa à densidade desses números.

No volume correspondente ao 7º ano dessa coleção, os autores seguem a mesma linha iniciando os capítulos com perguntas, seguindo com problemas e exercícios ao longo de todos eles. Contudo ao observarmos o sumário parece que nesse volume decidiram separar as unidades temáticas dispondo Números, Geometria, Medidas, em conjuntos individuais de capítulos.

Verificando os capítulos referentes aos números (capítulos 1, 3 e 7), houve abordagens de números naturais e racionais, mas estes chamados apenas de frações e números decimais. O capítulo 7 no qual os autores trataram dos positivos e negativos, tal qual expressam no título, é o último relacionado a conteúdos, pois os outros dois são de atividades de revisão, tal qual o volume do 6º ano. Ou seja, os autores encerram os conteúdos sem que os números racionais sejam tratados com esta denominação, nem no volume do 6º ano nem no do 7º. Na seção intitulada 'história das frações', os autores apenas mostram representações simbólicas dos egípcios para frações e seguem com atividades.

Nesse capítulo intitulado 'números positivos e números negativos', eles trazem a 'reta enumerada' com os dois sentidos indicados em algumas questões, sendo que em uma delas trazem a ideia de densidade dos números racionais ilustrativamente (ver figura 7), sem, no entanto, terem mencionado esse conjunto ao longo do livro. Logo iniciam questões sobre operações com inteiros e voltam a usar a reta enumerada para indicar como ocorrem a adição e a subtração por meio de avanços e retrocessos na reta. Assim, apesar de terem utilizado uma ferramenta que seria apropriada, não avançaram com a ideia de densidade iniciada na questão mencionada.

Figura 7: Ilustração do Livro *Descobrindo e Aplicando a Matemática*, do 7º ano, para tratar de aplicações da reta numerada como representação de inteiros, de decimais com uma casa decimal e de decimais com duas casas decimais.

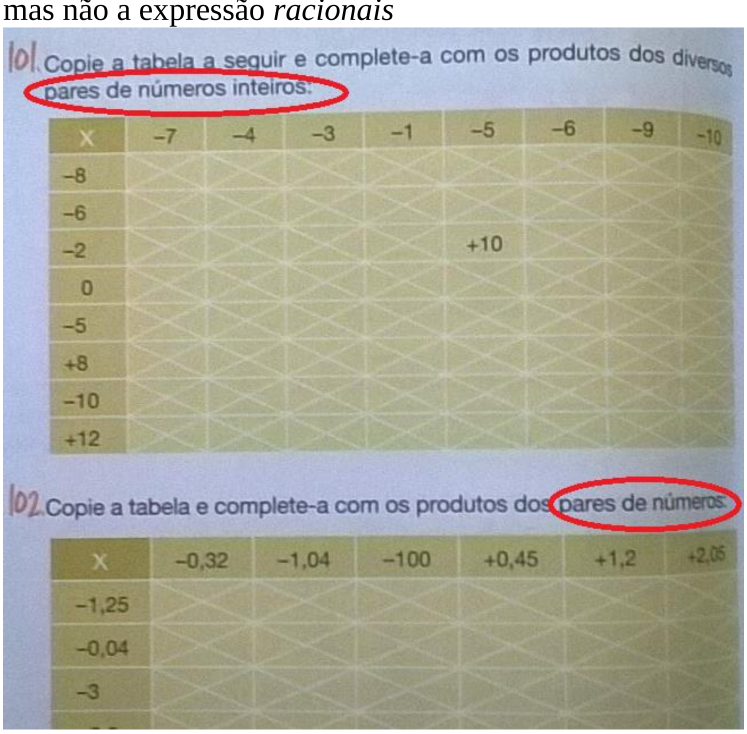


Fonte: Mazzieiro e Machado, 2015, p 245

Voltamos a ressaltar que, em nenhum momento, os autores usaram a palavra ‘racionais’ nesses dois volumes. Diante deste fato, decidimos verificar o volume 8. À semelhança do volume 7, no livro do 8º ano os autores separam as unidades temáticas: geometria, números, estatística, medidas. No capítulo direcionado aos números (capítulo 2), conforme padrão adotado pelos autores, são listados os objetivos do capítulo. Na lista de objetivos, os autores usam a palavra racionais: “resolver problemas ou expressões numéricas com os números naturais, inteiros, racionais na forma de fração, racionais na forma de decimais. [...]; escrever números naturais, inteiros ou racionais em ordem crescente ou decrescente.” (p. 40).

Contudo, ao longo de todo o capítulo, a palavra racionais não foi usada. Inclusive há questões semelhantes que quando envolvem números inteiros, os autores dizem ‘números inteiros’, mas quando envolvem o conjunto dos números racionais, sequer mencionam ‘racionais’.

Figura 8: Questões do livro *Descobrindo e Aplicando a Matemática*, do 8º ano, usando a expressão inteiros mas não a expressão *racionais*



01. Copie a tabela a seguir e complete-a com os produtos dos diversos pares de números inteiros:

X	−7	−4	−3	−1	−5	−6	−9	−10
−8								
−6								
−2					+10			
0								
−5								
+8								
−10								
+12								

02. Copie a tabela e complete-a com os produtos dos pares de números

X	−0,32	−1,04	−100	+0,45	+1,2	+2,05
−1,25						
−0,04						
−3						

Fonte: Mazzieiro e Machado, 2015, p 64

Assim, temos na coleção Descobrindo e Aplicando a Matemática, livros do 6º, 7º e 8º anos usando frações, decimais, explorando equivalências e operações, porém sem apresentar ao longo dos capítulos a denominação ‘racionais’. Essa privação não parece conveniente.

4.4 Matemática: ideias e desafios, de Mori e Onaga

No livro *Matemática: ideias e desafios*, de Mori e Onaga (2012), as unidades temáticas estão claramente divididas, embora alternem entre si. Ou seja, começa com os Números, vai para Geometria, retorna para Números e alterna dessa forma até chegar à unidade que relaciona Números e Medidas. E cada unidade referente a Números é fechada com um capítulo intitulado ‘Tratamento da Informação’. Certamente para isso, os autores pautaram-se nos blocos temáticos previstos pelos PCN.

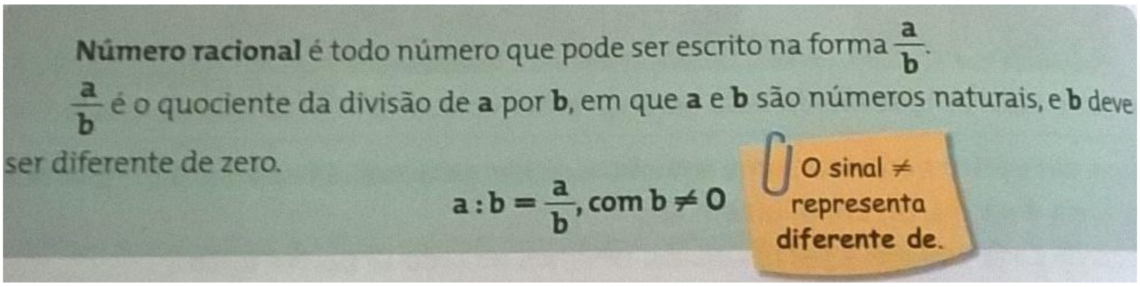
Mori e Onaga (2012) tratam dos números naturais (primeiro capítulo), com exemplos de situações do cotidiano em que estão presentes, com um pouco de história para justificar sua origem, o uso do ábaco ao definir sistema de numeração. Ao denominarem o conjunto tratado até então apresentam seu símbolo $\mathbb{N}$ e a forma como “podem ser escritos” (essas foram as palavras que usaram): $\mathbb{N}$: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, ...}, afirmando após falarem na sequência formada por sucessões que essa é a sequência dos números naturais, uma coleção que é o conjunto dos números naturais. (MORI; ONAGA, 2012, p.21).

Tais autoras não dizem o significado das reticências, embora pouco antes tenham dito que é uma sequência infinita formada pela ideia de sucessores. Elas ainda representam os naturais em uma reta com uso de pontos igualmente espaçados chamando tal distância, entre número e seu sucessor, de unidade.

Após a unidade reservada para as operações com os Naturais, há divisibilidade para se alcançar a ideia de divisão não exata e, por conseguinte, aos números racionais. Estes foram primeiramente apresentados sob representação fracionária e, neste sentido, as autoras pincelaram sua possível origem histórica, o significado de frações e termos associados. Nas sugestões dadas ao professor no livro manual do professor, as autoras indicam ao docente que este proponha situações-problemas em que os alunos identifiquem a insuficiência dos naturais e consequente necessidade dos racionais, apesar de já exporem na seção do conteúdo como surgiu a necessidade.

A definição dada neste livro aos números racionais é a seguinte:

Figura 9: Definição para número racional presente no livro *Matemática: ideias e desafios*, do 6º ano



Número racional é todo número que pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$.

$\frac{a}{b}$ é o quociente da divisão de **a** por **b**, em que **a** e **b** são números naturais, e **b** deve ser diferente de zero.

$$a : b = \frac{a}{b}, \text{ com } b \neq 0$$

O sinal $\neq$ representa diferente de.

Fonte: Mori e Onaga, 2012, p. 162

Sem justificativa para o denominador ter que ser diferente de zero e sem representação como conjunto.

Feito isso, as autoras focam nas características das frações, comparação e operações entre elas. A diferença entre os modos de representação entre naturais e inteiros de um lado (com os elementos sucessivos) e os racionais de outro (com uma "fórmula") não é tratada.

Mais adiante, as autoras tratam os racionais sob representação decimal, citando a necessidade dessa forma de representação e termos relacionados (décimo, centésimo, milésimo, ...). Ao tratarem da comparação e ordem desses números, recorrem à reta sugerindo a divisão do segmento correspondente à unidade em partes iguais conforme necessidade (10 partes iguais para números com casa decimal) ou conforme valor do denominador (número de partes a dividir). Então, iniciam a abordagem de operações com os racionais sob representação decimal.

Nota-se que o símbolo Q não foi apresentado tal qual as autoras fizeram para os números naturais. Da mesma forma, não foi dito que os racionais também são um conjunto, palavra usada para os naturais.

4.5 Matemática, de Silveira e Marques

Dividido em 19 unidades mais da metade do livro *Matemática*, de Silveira e Marques (1995), trata da unidade temática Números. O primeiro conjunto de capítulos deste livro é sobre conjuntos e depois vêm: Números Naturais, Sistemas de Numeração, Operações com Números Naturais, Divisibilidade, Decomposição em Fatores Primos, Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum, Números Racionais Absolutos, Operações com

Números Racionais Absolutos, Números Racionais Decimais, Operações com Números Racionais Decimais e, só então, seguem para as unidades temáticas Geometria e Medidas. Curioso observar que esse é o único livro, dentre os analisado, que traz a representação fracionária como números racionais absolutos.

Quando Silveira e Marques (1995) falam sobre conjuntos, apresentam a representação entre chaves e em diagramas, o significado de conjunto finito e infinito ressaltando que "a presença de reticências nem sempre significa que um conjunto é infinito. Exemplo: M = {1, 2, 3, 4, ..., 50} é um conjunto finito, sendo n(M)=50." (SILVEIRA; MARQUES; 1995, p. 4).

Além disso, nessa unidade inicial, eles tratam de igualdade entre conjuntos, relações de pertinência e de inclusão, apresentando toda simbologia envolvida. Procuram sempre intercalar cada tópico com 'exercícios de fixação' e finalizar a unidade com um conjunto de questões que denominam 'tarefa'.

Após a unidade sobre conjuntos, os autores trazem os Números Naturais iniciando sua unidade com um pouco de história desses números e escritas de alguns povos antigos. Logo após falam de correspondência biunívoca (usam exatamente essa expressão) a partir da noção de conjuntos. Então, definem números e numerais, além de tratarem de igualdade e desigualdade entre conjuntos em termos de quantidade de elementos e também propriedades de ambas relações (reflexiva, simétrica, transitiva), para só então definirem conjuntos numéricos e, por conseguinte, conjunto dos números naturais: "iniciando pelo zero e acrescentando sempre uma unidade, obteremos a sucessão dos **números naturais**." (SILVEIRA; MARQUES, 1995, p.28, grifo do autor)

Os autores trazem também os axiomas de Peano sem, no entanto, chamá-los dessa forma. Porém, dizem: "todo número natural tem um sucessor, pois o **conjunto dos números naturais é infinito**." (SILVEIRA; MARQUES, 1995, p. 28, grifo do autor). Esse 'pois', nos leva a concluir que o fato de ser infinito implica em ter sucessor.

Dando sequência, os autores trouxeram ainda a representação geométrica para os naturais com um passo a passo para se construir a representação na reta e já afirmando como identificar o maior ou menor número em relação a outro.

Tratam, adiante, da simbologia de subconjuntos relacionados aos Naturais (N) antes de encerrarem o capítulo sobre esse conjunto numérico. Uma vez encerrado, é seguido pela unidade que trata de Sistemas de Numeração, no qual os autores discorrem sobre várias bases e especialmente a decimal. Nesta unidade, trazem valor absoluto e valor relativo, o sistema de numeração romano e binário com indicação de uso e exercícios. Só, então, iniciam o capítulo sobre Operações com Números Naturais, abordando as propriedades da adição e multiplicação, os nomes dos termos em cada operação e sempre com a simbologia N. Além disso, ainda chamam a atenção para a divisão 0:0 como indeterminada uma vez que "apresenta infinitos resultados, pois todo número natural multiplicado por 0 dá 0." (SILVEIRA; MARQUES, 1995, p.71). Mesmo chegando a números que não pertencem aos naturais e divisões não exatas, os autores não deixam de tratar nesse capítulo sobre operações com Naturais.

Seguindo a sequência adotada para apresentação de conteúdos, tratam de divisibilidade e, portanto, múltiplos e divisores de naturais, além dos critérios de divisibilidade, e números primos e compostos, para falar em MMC e MDC antes de iniciarem o capítulo dos números racionais.

Os números racionais são apresentados em 4 capítulos (ou melhor, unidades, conforme denominam os autores). São elas: Números Racionais Absolutos, Operações com Números Racionais Absolutos, Números Racionais Decimais e Operações com Números Racionais Decimais. No primeiro, iniciam com ideia de fração definindo-a: "Dois números a e b ($b \neq 0$), quando escritos na forma a/b representam uma fração, onde: b (denominador): indica quantas dessas partes iguais em que a unidade foi dividida; a (numerador): indica quantas dessas partes foram consideradas." (SILVEIRA; MARQUES, 1995, p.136)

Como observação, os autores acrescentam que "5/0, 7/0, 8/0, não são frações" e também informam sobre a origem latina dos nomes dos termos de uma fração.

Os autores seguem apresentando como se lê uma fração, os tipos de fração, a forma mista, frações equivalentes, classes de equivalência, simplificação usando MDC, redução de fração a um mesmo denominador a partir de um processo e também do uso de MMC, comparação quando denominadores são iguais e quando são diferentes.

Quando abordam as classes de equivalência, afirmam:

> o conjunto das frações equivalentes a uma dada fração, constitui classe de equivalência (CE) dessa fração. [...] cada classe de frações equivalentes entre si é denominada número racional **absoluto**, que pode ser representado por qualquer uma das frações de classe. [...] número racional absoluto é todo número que pode ser escrito na forma a/b, com a e b naturais e b diferente de zero. (SILVEIRA; MARQUES, 1995, p.149, grifo do autor).

A mesma definição do que representa uma fração é dada a número racional absoluto e entre um momento e outro foi dito que racional absoluto é classe de equivalência. A abordagem que fazem sobre as classes de equivalência traz uma tentativa, um pouco diferente dos demais livros, de expor a questão de que “cada número racional pode ser representado por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias” (BRASIL, 1998, 101), que é um dos obstáculos nos estudos de números racionais, segundo consta nos PCN.

Os autores procuram distinguir ainda número racional natural (“quando a é múltiplo de b”) e fracionário (“quando a não é múltiplo de b”) e procuram informar que “O conjunto dos números racionais absolutos é representado por Q+” (SILVEIRA; MARQUES, 1995, p.149) bem como “a união entre os conjunto dos naturais e dos fracionários origina o conjunto dos números racionais absolutos.” (idem, p.150) e fazem representação de união entre conjuntos, em diagramas, sendo N um subconjunto de Q+. Contudo, sem nem explicar o motivo do símbolo Q+.

No capítulo seguinte sobre as operações com os racionais absolutos, para a divisão os autores explicam o que significa dizer, por exemplo, 2÷1/4: “A operação consiste em determinar quantas vezes ¼ cabe em duas unidades” (SILVEIRA; MARQUES, p.162) e representa de seguinte forma:

Figura 10: ilustração representando a operação de divisão com fração, presente no livro *Matemática*, da 5ª série (atual 6º ano)

Fonte: Silveira e Marques, 1995, p. 162

Ao terminarem a apresentação das operações, trazem problemas resolvidos com uso de frações e ao final várias tarefas, conforme padrão adotado para cada capítulo (unidade).

Sobre os números racionais decimais, a introdução é feita com exemplo de medição com notação decimal, afirmando ser esta “uma outra forma de representação dos números racionais fracionários” (SILVEIRA; MARQUES, 1995, p.181). Falam rapidamente sobre o século XVI como sendo quando surgiu e se expandiu o uso dessa forma dos racionais.

Nesse capítulo, os autores apresentam as partes de um número decimal, a forma de leitura, transformações de decimais em frações e de frações em decimais, equivalências entre decimais, além de comparação para saber qual é maior, seja quando as partes inteiras são diferentes ou iguais.

O capítulo seguinte aborda as operações com os racionais na forma decimal, em especial o cuidado com o uso do zero para a realização de algumas divisões. Os autores apresentam também as dízimas periódicas e denominam "números decimais periódicos" e como obter a geratriz de uma dízima periódica, bem como apresentam uma curiosidade sobre como identificar se uma fração irredutível é decimal exato ou dízima periódica ou composta. Por fim, tem-se operações com raiz quadrada e potenciação e exercícios e tarefas.

Diferentemente do capítulo sobre números racionais absolutos, como denominaram os autores, não houve uma definição formal envolvendo a forma decimal para designá-lo como racional, apenas o título indicando. Em nenhum momento houve uso de reta numérica para tais números. Apenas um segmento de reta aparece em uma única questão de uma das penúltimas listas de tarefas do primeiro capítulo sobre os racionais, diferentemente da representação geométrica feita para os naturais. Nada se fala sobre não podermos identificar sucessores de racionais (sua densidade) e a representação como conjunto é apenas como união de outros dois ({naturais}U{fracionários}) tratando os decimais como apenas uma outra forma de representar os fracionários, e já não falam mais em conjuntos quando exploram a forma decimal. Embora haja uma tentativa com o que conseguiram desenvolver sobre Classes de Equivalência, não se chama a atenção para o fato de cada número racional ter suas várias representações como algo que não acontece com os naturais. Além disso, são tratados apenas os números positivos já que neste volume os inteiros não são abordados.

4.6 Matemática Hoje é Feita Assim, de Bigode

O livro *Matemática, hoje é feita assim*, de Bigode (2000), é dividido em 14 capítulos dos quais dois (11º e 12º) são voltados aos números racionais e intitulados 'as frações' e 'os números decimais'. Mas antes de chegar a esses capítulos, o autor trata dos números naturais relatando acontecimentos históricos relativos a origem desse conjunto e caracterizando o sistema de numeração decimal até, mais adiante no capítulo, chegar à definição: "os números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ..., e assim por diante, são chamados de números naturais, porque são os números que usamos naturalmente para contar." (BIGODE, 2000, p.23)

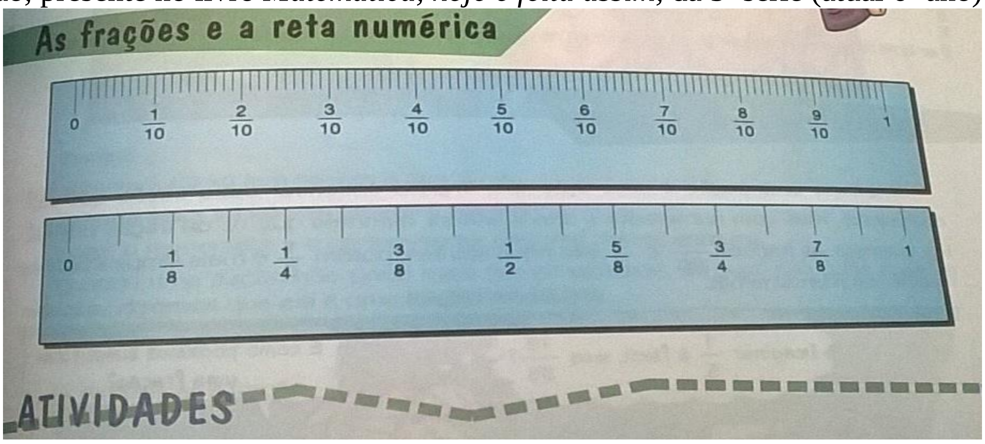
Definição seguida pela apresentação da ideia de sucessor e antecessor e fechando o capítulo com exercícios.

Feita a apresentação do naturais, o autor segue com as operações aritméticas com os naturais, decomposição, múltiplos, números primos, divisores.

Somente no capítulo 11 iniciou conteúdo voltado aos números racionais com apresentação do tangram (quadrado formado por sete peças) e figuras geométricas para tratar de frações (título do capítulo). Então, ele apresenta como se lê uma fração e os nomes dos termos (numerador – "número de cima" – e denominador – "o número de baixo"). Segue com exercícios e volta ao assunto com um problema, mais exercícios e, trata de frações equivalentes e comparação de frações com barras e ilustração de pedaços de pizza.

Bigode (2000, p. 209) chama uma subseção de "as frações e a reta numérica" mas traz apenas o desenho de parte de uma reta/régua com marcação de algumas frações entre 0 e 1, sem escrever qualquer palavra a respeito (ver figura 11). E dessa forma, parte para as subseções seguintes nas quais fala sobre simplificação de frações, frações decimais e divisores de 10, encerrando o capítulo com uma curiosidade sobre o significado da palavra fração.

Figura 11: Seção referente à localização de frações numa reta numérica sem qualquer explicação, presente no livro *Matemática, hoje é feita assim*, da 5ª série (atual 6º ano)



Fonte: Bigode, 2000, p. 209

O capítulo seguinte, intitulado "números decimais" ditos "números escritos com vírgula" como também dizem outros autores, é iniciado com imagens exemplificando seu uso (gráficos, histórico bancário, calculadora). Depois, em algumas linhas, o autor menciona a necessidade histórica de seu uso em medições seguindo com exemplos de peso e altura. Então relaciona fração com denominador múltiplo de 10 e a escrita decimal. Segue com comparação entre decimais partindo para operações básicas com tais números. O capitulo é encerrado sem que os números sejam apresentados com a denominação de números racionais.

Bigode (2000) apresenta os conteúdos com um pouco de história, usando quadrinhos, curiosidades, mas é superficial em muitos pontos. Deixando de lado informações importantes como a própria denominação 'números racionais' e o fato de trazer um tópico com a reta numérica sem qualquer frase a respeito.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados em avaliações nacionais, como os do SAEB, por exemplo, e internacionais, como os do PISA, não têm sido apreciáveis no que diz respeito ao desempenho de estudantes em relação aos conteúdos matemáticos. E quando verificamos, de maneira minuciosa, tais avaliações, percebemos que as dificuldades com conteúdos básicos envolvendo a temática números são evidentes, principalmente quando estamos diante dos números racionais. E isso é fortemente confirmado por pesquisas realizadas no país revelando o quanto as dificuldades com os números racionais estão presentes tanto no ensino fundamental como no ensino médio, interferindo inclusive na aprendizagem de outros conteúdos.

Os estudantes tendem a associar números racionais apenas a frações, embora não compreendam seu significado em questões que requerem interpretação, ou mesmo confundindo numerador e denominador. Conforme levantamento de pesquisas sobre esse conjunto de números, discutidas no capítulo II, foram apontadas também dificuldades em localizar os números racionais na reta numérica, até mesmo em sua forma decimal.

Uma vez que os números naturais são amplamente trabalhados e esmiuçados ao longo das séries inicias, há tendência das ideias relacionadas a outros conjuntos numéricos girarem em torno dos mesmos conceitos aplicados ao caso dos naturais, gerando confusões entre noções próprias de cada conjunto. A densidade do conjunto dos números racionais é uma característica que o torna bastante distinto do conjunto dos naturais, principalmente quanto à sua representação, sem a possibilidade de apresentar elementos consecutivos como fazemos com os naturais. Foi acreditando que a compreensão dessa diferença é viável e necessária, quando tais números são estudados no ensino fundamental, que analisamos alguns dos livros didáticos do ensino fundamental (em sua maioria do 6º ano), recomendados pelo PNLD, e notamos que não há cuidados em relação à abordagem dessa transição. Além disso, notamos que não há propostas de superação desse obstáculo, referente ao fato de se enxergar os números racionais com olhos carregados por alguns aspectos que caracterizam os naturais. Pelo contrário, encontramos falhas que não estão apenas na noção de densidade. Há autores que não chegam a usar a expressão ‘números racionais’ quando lidam com tais números em suas representações fracionárias e decimais e, quando utilizam a expressão, é apenas no título do capítulo. Em dois dos livros analisados, os autores apresentam números naturais usados com vírgula e em um desses livros, o autor chama a forma decimal dos números racionais de ‘números com vírgula’ sem nada mencionar sobre o caso dos 'naturais com vírgula' que apontou em capítulo anterior. Em um dos livros mais antigos, o autor afirma que uma fração é a representação feita com dois números naturais e uma barra entre eles. Nos textos mais atuais, há autores que relacionam frações e decimais com naturais sem mencionar que as frações e os decimais são representações de outro conjunto numérico. Assim, nos questionamos se é possível não confundir naturais e racionais em casos como esses.

É importante ressaltar também, que todos os autores dos livros do 6º ano que apresentaram o símbolo de conjunto dos números naturais, não fizeram o mesmo para os números racionais.

Destacamos ainda que os livros, inclusive o do 7º ano analisado, não discutem a questão de não ser cabível a ideia de sucessor para os racionais por haver infinitos racionais entre dois outros racionais. A expressão infinito não é usada por qualquer dos autores dos livros do PNLD analisados. Em um desses livros, o que temos a respeito são observações direcionadas ao professor em que as autoras sugerem ao profissional que desenvolva atividades para os alunos perceberem intuitivamente o infinito entre dois racionais. Parecem eximir-se de qualquer responsabilidade por essa abordagem.

Consideramos que o uso da reta numérica seria uma forma viável para auxiliar na compreensão da densidade do conjunto dos números racionais. Porém, quando os autores fazem uso desse elemento, limitam-se à posição de alguns números, não explorando a possibilidade de uso dessa ferramenta para a concepção de infinito dentro dos racionais, no sentido de sua densidade. Em um dos livros, os autores, na verdade, sugerem aproximar o valor de determinados números racionais na forma de decimais antes de indicar sua localização na reta. Em outro, não é abordada a comparação entre racionais na forma de fração. Os autores sugerem colocar as frações na forma decimal para depois haver essa comparação. Por sua vez, no capítulo sobre números positivos e negativos do livro do 7º ano analisado, os autores apresentam um pouco da ideia de densidade, mas não a exploram nesse sentido, conforme apontamos no capítulo IV. Os racionais nem chegam a ser apresentados, pelos autores, com esse nome.

Desta forma, acreditamos que há muito a ser feito em relação ao ensino deste conteúdo. Ainda que os aspectos apontados pareçam ser meros detalhes, estes podem se tornar grandes obstáculos, dentre tantos outros que permeiam o processo de ensino-aprendizagem de matemática. Em relação ao conjunto dos números racionais, por exemplo, na maior parte dos livros analisados, omitem-se o nome do conjunto e algumas das características desses números. Esse mesmo fenômeno não se dá quando os livros abordam o conjunto dos números naturais. Acreditamos que o cuidado que se deve ter na abordagem de conteúdos básicos, especialmente em livros didáticos, é imprescindível. Assim, consideramos relevante dar a devida atenção aos aspectos apontados, tendo em vista que os números são conteúdos matemáticos básicos, primordiais para a compreensão do mundo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, Manoel de Campos. **As Mais Antigas Evidências Conhecidas do emprego de Talhas Numéricas Associadas a Processos de Contagem.** PUCPR, Março de 2015.

ARAÚJO, Adérito. **Matemática do Discreto e do Contínuo**. Texto para uma Ação de Formação de Professores. Coimbra, 1998. Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/~alma/publicat/other/Foco.pdf> (acesso em 25/08/2017)

BARCO, Luiz. **Aprender a Contar:** pelos dedos, de dez em dez. Revista SUPERINTERESSANTE, nº 8, maio de 1988. São Paulo: abril, 1988. <https://super.abril.com.br/comportamento/aprender-a-contar-pelos-dedos-de-dez-em-dez/> (acesso em 26/08/2017)

BIGODE, Antonio J. L. **Matemática Hoje é Feita Assim**. Ensino Fundamental. 5ª série. São Paulo: FTD S.A., 2000.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria Executiva. INEP. **Instruções para Aplicação do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB)**. Diretoria de Gestão e Planejamento: Brasília, 2015. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/imprensa/2015/cartilha_saeb2015.pdf> (acesso em 12/08/2017).

BRASIL. Ministério da Educação. Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico. **Brasil no PISA 2015**: análises e reflexões sobre o desempenho dos estudantes brasileiros. Brasília, novembro de 2016. São Paulo: Fundação Santillana, 2016. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2015/pisa2015_completo_final_baixa.pdf > (acesso em 04 de agosto de 2017).

BRASIL. Ministério da Educação. **SAEB**. Atualizado em 27 de junho de 2017. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/guest/educacao-basica/saeb> (acesso em 12/08/2017)

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC, 1998.

BROLEZZI, Antonio Carlos. **A Tensão entre o Discreto e o Contínuo na História da Matemática e no Ensino de Matemática**. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. São Paulo, dezembro de 1996. Disponível em: <www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48133/tde-29082013.../doutoradobrolezzi.pdf> (acesso em 25/08/2017)

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa, 1951.

CENTURIÓN, Marília; JAKUBOVIC, José. **Matemática nos Dias de Hoje**: na medida certa. Ensino Fundamental. Coleção: 6º e 7º anos. 1ª edição. São Paulo: Leya, 2015.

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Teláris**: Matemática. Ensino Fundamental. 6º ano. 1ª edição. São Paulo: Ática, 2012.

FNDE. Ministério da Educação. **Programas do Livro**. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/programas/programas-do-livro/> (acesso em: 19/08/2017)

FUNDAÇÃO LEMANN. **Resultados do Ideb 2015**. Disponível em: <http://www.fundacaolemann.org.br/wp-content/uploads/2016/09/Resultados-do-Ideb-2015_Analise-Fundacao-Lemann.pdf> (acesso em 12/08/2017)

GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo; et al. **Métodos de Pesquisa**. Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

GONÇALVES, Dângela Maria Falcão**. Consequências das Dificuldades com Números Racionais na Aprendizagem de Função**: um estudo. Monografia (Especialização em Educação Matemática). Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande/PB, 2014. Disponível em: <http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/5128/1/PDF%20-%20Ds%C3%A2ngela%20Maria%20Falc%C3%A3o%20Gon%C3%A7alves.pdf> (acesso em 26/08/2017)

INEP. **Relatório Pedagógico Enem 2011-2012**. Diretoria de Avaliação da Educação Básica-DAEB. Ministérios da Educação. Brasília, setembro de 2015. Disponível em: <http://www.publicacoes.inep.gov.br/portal/download/1401> (acesso em 19/08/2017)

MAZZIEIRO, Alceu dos S.; MACHADO, Paulo A. F. **Descobrindo e Aplicando a Matemática**. Ensino Fundamental. Coleção: 6º, 7º e 8º anos. 2ª edição. Belo Horizonte: editora Dimensão, 2015.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce S. **Matemática, Ideias e Desafios**. 6º ano. 17ª edição. São Paulo: Saraiva, 2012.

OCDE. **Programme for International Studente Assessment**: results from PISA 2015. Disponível em: <http://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-Brazil.pdf> (acesso em: 04/08/2017)

OLIVEIRA, Jéssika Naves de. **Dificuldades na Aprendizagem dos Números Racionais**: confrontando dois níveis de escolaridade. XII Encontro Nacional de Educação Matemática. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016.

PEREIRA, Taciany da S.; ZÚÑIGA, Nora Olinda C. **Uma Investigação sobre as Dificuldades dos Alunos das Séries Iniciais do Ensino Médio Envolvendo Frações**. VII Encontro Mineiro de Educação Matemática. Práticas Educativas e de Pesquisa em Educação Matemática. 9 a 12 de outubro de 2015. Disponível em: <http://www.ufjf.br/emem/files/2015/10/UMA-INVESTIGA%C3%87%C3%83O-SOBRE-AS-DIFICULDADES-DOS-ALUNOS-DAS-S%C3%89RIES-INICIAIS-DO-ENSINO-M%C3%89DIO-ENVOLVENDO-FRA%C3%87%C3%95ES.pdf> (acesso em: 26/08/2017)

QUADROS, Sérgio. **Opinião**: o papel do livro didático. 27 de fevereiro de 2013. Jornal O ESTADO DE MINAS. Disponível em: <http://www.todospelaeducacao.org.br/educacao-na-midia/indice/26006/opiniao-o-papel-do-livro-didatico> (acesso em 19/08/2017).

RORIZ, Murilo Morais. **A Construção dos Números Reais**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Departamento de Matemática da Universidade de Brasília. Brasília: UnB, 2014.

SILVEIRA, Ênio; MARQUES, Cláudio. **Matemática**. Ensino Fundamental. 5ª série. 1ª edição. São Paulo: Editora Moderna, 1995.

TODOS PELA EDUCAÇÃO. **Apenas 9,3% dos alunos do Ensino Médio aprenderam o adequado em Matemática, em 2013**. 23 de dezembro de 2014. Disponível em: <https://www.todospelaeducacao.org.br/sala-de-imprensa/releases/32329/apenas-93-dos-alunos-do-ensino-medio-aprenderam-o-adequado-em-matematica-em-2013/> (acesso em 12/08/2017).